

CAMUS

Volume 8 Cahiers mathématiques de
l'Université de Sherbrooke

C. Guillemette et B. Ouimette <i>Algèbres de Poisson et courbes sur les surfaces</i>	1
G. Soroka-Perras <i>Introduction à la topologie différentielle par le biais de la théorie de Morse classique</i>	33
Z. Dubois <i>Une introduction aux théories topologiques des champs quantiques</i>	59
C. Allard <i>Classification des extensions centrales de groupes finis</i>	77
T. Giroux <i>Théorie ergodique</i>	99
M.-P. Domingue, K. Herrmann et V. Shramchenko <i>Entrevue avec le Professeur Ibrahim Assem</i>	125

Algèbres de Poisson et courbes sur les surfaces

Benjamin Ouimette et Cassandra Guillemette

Reçu le 2022-03-01 et accepté le 2022-11-29

RÉSUMÉ Nous proposons une approche élémentaire aux crochets de Poisson sur certaines variétés de caractères de surfaces. L'outil fondamental est le crochet de Goldman défini sur les classes d'homotopie libres de courbes sur une surface.

1 Introduction

La mécanique hamiltonienne, introduite au 19^{ème} siècle par W.R. Hamilton, est une manière de reformuler les lois de la physique newtonnienne où l'objet fondamental est la fonction d'énergie totale H , appelée *hamiltonien*. Notons par X l'*espace des phases*, qui est l'espace de toutes les configurations possibles d'un système physique. Chaque point $x \in X$ contient l'information de la position et de la vitesse de chaque particule dans le système. On appelle une fonction lisse $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une *observable*, et on note l'ensemble des observables par $C^\infty(X)$. Le hamiltonien $H : X \rightarrow \mathbb{R}$ est donc un exemple d'observable. Un objet algébrique fondamental, le crochet de Poisson $\{\cdot, \cdot\} : C^\infty(X) \times C^\infty(X) \rightarrow C^\infty(X)$, permet d'écrire toutes les équations du mouvement de manière unifiée. Pour n'importe quelle observable $f \in C^\infty(X)$ qui ne dépend pas explicitement du temps, l'évolution de la quantité f en fonction du temps est déterminée par l'équation différentielle

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\}. \quad (1)$$

Plus généralement, une *variété de Poisson* est une variété X dont l'algèbre de fonctions réelles $C^\infty(X)$ est munie d'un crochet de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$. Un *système dynamique hamiltonien* est un système dynamique sur une variété de Poisson défini par un hamiltonien H et l'équation de Hamilton (1).

Dans son article de 1986 [Gol86], Goldman a défini une structure de variété de Poisson sur la *variété de caractères* du groupe fondamental d'une surface vers

Nous tenons à remercier Jean-Philippe Burelle pour son aide et son enseignement précieux ayant permis la rédaction de cet article.

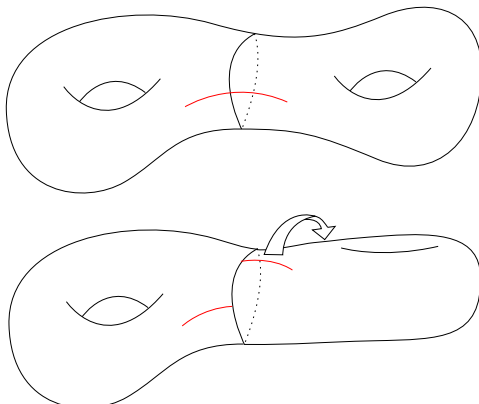


FIGURE 1 : Le « twist » d'une surface le long d'une courbe simple fermée.

un groupe de Lie. Étant donné une surface topologique Σ et un groupe de Lie G , la *variété de caractères* associée est la variété algébrique

$$\chi(\Gamma, G) := \text{Hom}(\Gamma, G) // G,$$

où $\Gamma = \pi_1(\Sigma)$ et G agit par conjugaison sur $\text{Hom}(\Gamma, G)$. La double barre $//$ représente le « quotient GIT », un type de quotient spécial qui permet de s'assurer que le quotient d'une variété algébrique par une action de groupe est toujours une variété algébrique [Dol03], mais la définition usuelle du quotient sera suffisante dans cet article.

Le crochet de Poisson sur l'espace des fonctions de la variété des caractères d'une surface contient beaucoup d'information géométrique. Par exemple, si le groupe de Lie d'arrivée est le groupe $\text{SL}(2, \mathbb{R})$, une des composantes de l'espace des représentations $\chi(\pi_1(\Sigma), \text{SL}(2, \mathbb{R}))$ s'interprète comme l'espace des métriques hyperboliques sur Σ . Si l'on pose comme hamiltonien H une fonction de longueur, c'est-à-dire une fonction $\ell_\gamma : \chi(\pi_1(\Sigma), \text{SL}(2, \mathbb{R})) \rightarrow \mathbb{R}$ qui associe à une courbe fermée simple γ sa longueur $\ell_\gamma(\rho)$ dans la métrique associée à ρ , alors le flot associé est donné par un « twist » le long de γ , une opération qui garde la longueur de cette courbe invariante et « tourne » une moitié de la surface par rapport à l'autre (Figure 1).

Dans le même article, Goldman établit une formule pour le crochet de Poisson entre deux *fonctions de trace*, c'est-à-dire des fonctions qui associent à un homomorphisme ρ la trace de la matrice $\rho(\gamma)$ pour un $\gamma \in \Gamma$ fixé. Cette formule est une somme sur les points d'intersection entre les lacets qui définissent les fonctions de trace. Cette formule a inspiré la définition d'un *crochet de Lie* sur l'espace des classes d'homotopie libres de courbes sur une surface appelé *crochet de Goldman*. Ce crochet de Lie est d'intérêt indépendant et a été étudié dans plusieurs articles récents [Tur91, Cha04, Cha15, CK10].

Dans cet article, nous proposons une approche élémentaire à l'étude des crochets de Poisson sur les variétés de caractères pour les groupes $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ et

$GL(2, \mathbb{C})$ basée sur la définition du crochet de Goldman. Nous utiliserons la formule de Goldman pour définir un crochet sur les algèbres de fonctions des variétés de caractères, et démontrerons qu'il s'agit bien d'un crochet de Poisson.

L'article est organisé comme suit. Dans la section 2, on décrira le groupe fondamental d'une surface et on abordera les notions d'homotopies et de conjugaison de courbes sur des surfaces. Ensuite, dans la troisième section, on présentera un objet central à notre article, soit le crochet de Goldman. Par la suite, la section 4 visera à présenter la notion d'algèbres de fonctions polynomiales sur une variété algébrique et l'espace vectoriel du produit tensoriel ainsi qu'un lien important entre ceux-ci donnée par la proposition 4.5. La section 4.1 abordera l'espace des homomorphismes entre un groupe de présentation fini et certains groupes algébriques d'intérêt puis les variétés de caractères correspondant à cet espace d'homomorphisme quotienté par le groupe. La section 4.2 présentera quant à elle certaines identités de trace se montrant utiles dans des calculs et des démonstrations de cet article. Pour continuer, la cinquième section visera à démontrer deux théorèmes portant sur des isomorphismes concernant la variété de caractères sur le groupe $GL(2, \mathbb{C})$ et l'espace des fonctions polynomiales sur cette variété de caractères. Pour ce faire, la section 5.1 présentera l'action du groupe $\chi(\Gamma, \{-1, 1\})$ ainsi que la définition d'une algèbre de fonctions G -invariantes. Dans la partie 5.2, on démontrera deux théorèmes importants. Puis la section 6 portera sur les crochets de Poisson qui ont un lien étroit avec le crochet de Goldman. Les sections 6.1, 6.2 et 6.3 viseront à montrer que le crochet de Goldman permet de définir un crochet de Poisson sur trois espaces.

2 Groupe fondamental

Soit X un espace topologique. Dans cet article, la plupart des espaces topologiques que nous étudierons seront des surfaces. Les exemples principaux seront le tore à un trou et la sphère à trois trous.

Définition 2.1. On appelle *lacet* sur X toute application continue $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ telle que $\gamma(0) = \gamma(1)$. Un lacet est donc un chemin fermé sur X . Notons par $\mathfrak{L}(X, x_0)$ l'ensemble des lacets sur X tels que $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$. On dit alors que γ est basé en x_0 .

Définition 2.2. Soient γ_1, γ_2 deux chemins sur X tels que $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$. La *concaténation* de γ_1 et γ_2 , notée $\gamma_1\gamma_2$, est le chemin défini par

$$(\gamma_1\gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \gamma_2(2t - 1) & \text{si } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

On peut interpréter ceci comme étant le chemin suivant γ_1 et ensuite γ_2 .

Définition 2.3. Deux lacets $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow X$ basés en x_0 sont *homotopes* s'il existe une application continue $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ telle que

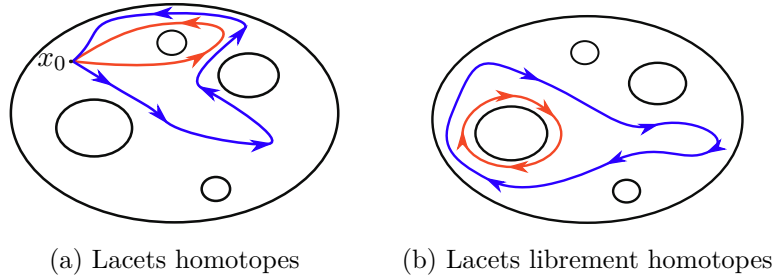


FIGURE 2 : Les deux notions d'homotopie entre deux lacets

1. $h(t,0) = \gamma_1(t) \forall t \in [0,1]$;
2. $h(t,1) = \gamma_2(t) \forall t \in [0,1]$;
3. $h(0,s) = h(1,s) = x_0 \forall s \in [0,1]$.

Ainsi, deux lacets sont homotopes si on peut déformer l'un de manière continue à l'autre, et on appelle l'application h une homotopie basée en x_0 . On dit que deux lacets respectivement basés en x_0 et y_0 sont librement homotopes si la condition 3 est oubliée.

Exemple 2.4. On voit aux figures 2a et 2b respectivement un exemple d'une paire de lacets homotopes et d'une paire de lacets librement homotopes sur la sphère à cinq trous.

Définition 2.5. L'ensemble $\mathfrak{L}(X, x_0) / \sim$ muni de l'opération de concaténation, où la relation d'équivalence est celle d'homotopie basée en x_0 , forme un groupe, nommé le *groupe fondamental* de X basé en x_0 . On le note $\pi_1(X, x_0)$.

Si X est connexe par arcs, alors $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, y_0)$. Alors on parle simplement de *groupe fondamental* et on le note simplement $\pi_1(X)$.

Définition 2.6. Deux lacets γ_1 et γ_2 sont *conjugués* si $\exists \gamma \in \pi_1(X)$ tel que $\gamma_1 = \gamma\gamma_2\gamma^{-1}$ où γ^{-1} est le lacet γ parcouru dans le sens contraire.

Notons par π l'ensemble des classes de conjugaison du groupe fondamental $\pi_1(X)$. La figure 2b peut être interprétée comme montrant deux représentants d'une classe de conjugaison de $\pi_1(X)$, tel que nous le comprendrons plus tard dans le théorème 2.8.

Les définitions suivantes vont nous permettre d'étudier les courbes sur des surfaces plus aisément.

Définition 2.7. Un *groupe libre* engendré par g générateurs se note $F_g = \langle a_1, a_2, \dots, a_g \rangle$. Ses éléments sont des mots réduits de l'alphabet

$$a_1, a_2, \dots, a_g, a_1^{-1}, a_2^{-1}, \dots, a_g^{-1}$$

et l'opération de groupe est la concaténation. Un mot *réduit* est un mot ne contenant pas un générateur et son inverse côte à côte. Par exemple, $a_2 a_9^{-3} a_4^{-1}$ est un élément de F_{15} .

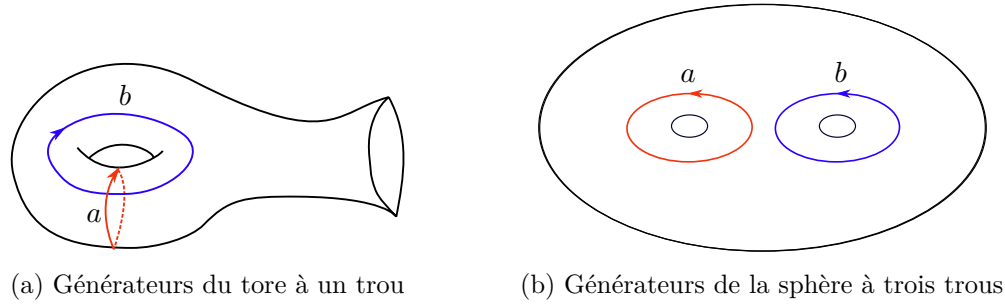


FIGURE 3 : Générateurs sur deux surfaces

Si Σ est une surface orientable avec au moins un bord, alors son groupe fondamental est libre à n générateurs où $n = 2g + b - 1$. Ici, g est le genre de la surface Σ et b est son nombre de bords[Cha15]. Ainsi, comme le tore à un trou a un bord et un genre et que la sphère à trois trous a trois bords et aucun genre, leur groupe fondamental est libre. En fait, pour ces deux surfaces, leur groupe fondamental est $F_2 = \langle a, b \rangle$. Les surfaces avec leurs générateurs a et b sont présentées à la figure 3.

Théorème 2.8. [Cha15, Corollaire 2.1] Soit Σ une surface connexe. Alors, il y a une bijection entre l'ensemble des classes d'homotopie libres des courbes orientées sur Σ et les éléments de π .

Enfin, on note par $\mathbb{C}\pi$ le \mathbb{C} -espace vectoriel des combinaisons linéaires d'éléments de π . Par exemple, sur le tore à un trou, $(2 + i)ab - 4b^{-1} + 5ia^2b$ est un élément de $\mathbb{C}[\pi]$ où ab, b^{-1} et a^2b sont ici des représentants de leur classe de conjugaison.

3 Crochet de Goldman

Dans cette section, nous définirons un *crochet de Lie* sur $\mathbb{C}\pi$ qui a été défini en 1986 par W. Goldman [Gol86].

Notons qu'à partir d'ici, lorsque nous parlerons d'une courbe γ , le symbole γ représentera en fait une classe de conjugaison (donc une classe d'homotopie libre) dans π .

Définition 3.1. Une *algèbre de Lie* A est un espace vectoriel \mathfrak{g} sur un corps k muni d'une opération appelée *crochet de Lie* $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ qui est bilinéaire, antisymétrique, vérifie que $\forall x \in A, [x, x] = 0$, et satisfait l'identité de Jacobi, soit que $\forall x, y, z \in A, [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$.

Définition 3.2. Le *crochet de Goldman orienté* est le crochet de Lie $[\cdot, \cdot] : \mathbb{C}\pi \times \mathbb{C}\pi \rightarrow \mathbb{C}\pi$ défini par

$$[\gamma_1, \gamma_2] = \sum_{p_i \in \gamma_1 \cap \gamma_2} s_i \cdot (\gamma_1 \cdot_{p_i} \gamma_2).$$

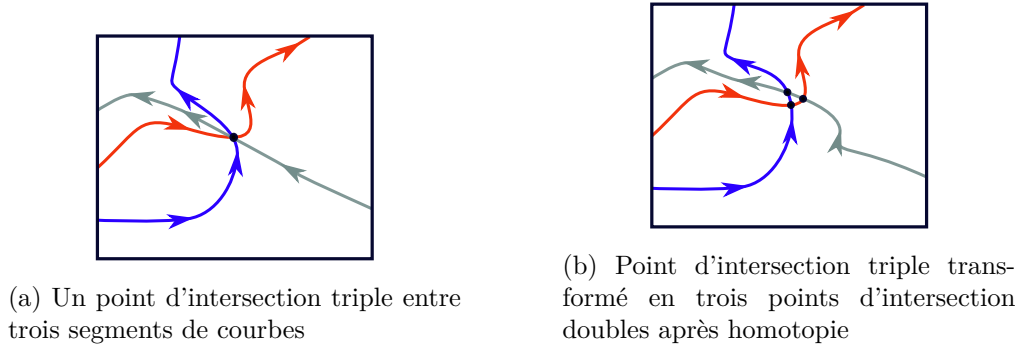


FIGURE 4 : Points d'intersection triple

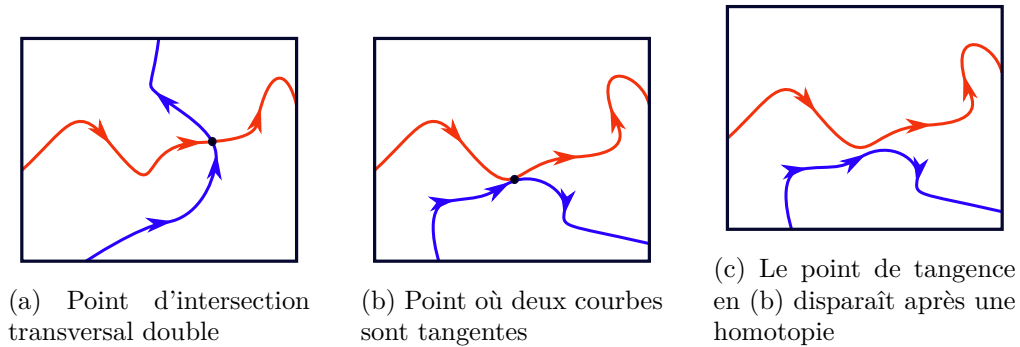


FIGURE 5 : Transversalité et tangence

Ici, les p_i désignent les points d'intersection doubles transversaux entre des représentants de γ_1 et γ_2 , c'est-à-dire les points d'intersection tels que les courbes ne sont pas tangentes en ces points et ne passent qu'une fois par ces points, signifiant qu'il n'y a pas de point correspondant à l'intersection de plus de deux segments de courbes. Ce dernier fait est toujours possible car on peut appliquer une homotopie sur les courbes afin que les points d'intersection entre deux courbes ne correspondent qu'à l'intersection de deux segments de courbes (par exemple voir la figure 4 pour transformer un point transversal de triple intersection en points transversaux de double intersection). Notons qu'on peut toujours appliquer une homotopie sur γ_1 et γ_2 pour qu'ils ne contiennent que des points d'intersection transversaux doubles (voir les figures 4 et 5). Aussi, $\gamma_1 \cdot_{p_i} \gamma_2$ signifie la concaténation de γ_1 et γ_2 au point p_i . Enfin, le signe s_i vaut $+1$ si les vecteurs tangents aux chemins γ_1 et γ_2 en p_i forment une base orientée de l'espace tangent à la surface en p_i , et -1 sinon (voir figure 9).

L'espace vectoriel $\mathbb{C}\pi$ muni du crochet de Goldman orienté forme une algèbre de Lie [Gol86].

Exemple 3.3. Calculons le crochet de Goldman orienté sur le tore à un trou

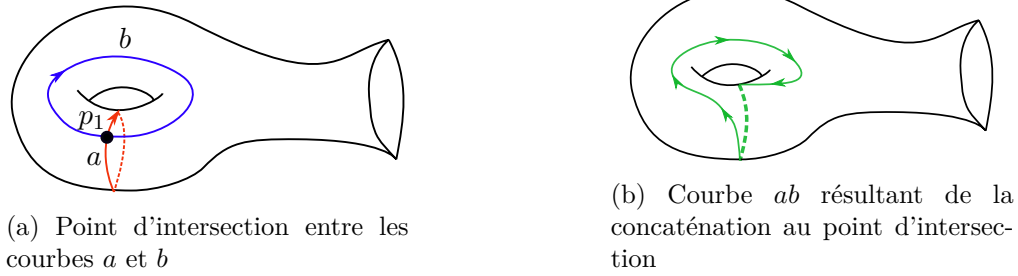


FIGURE 6 : Crochet de Goldman orienté des courbes a et b sur le tore à un trou

entre les courbes a et b . On obtient que

$$[a,b] = ab.$$

Cet exemple est présenté sur la figure 6.

Exemple 3.4. Calculons le crochet de Goldman orienté sur la sphère à trois trous entre les courbes a^2b et ab^{-1} . On trouve que

$$[a^2b, ab^{-1}] = -a^2bab^{-1} + aba^2b^{-1}.$$

Ce résultat se visualise sur la figure 7.

On peut également définir un crochet de Goldman non orienté. On note par $\mathbb{C}\pi$ l'ensemble $\mathbb{C}\pi / \sim$ où $\gamma \sim \gamma^{-1}$, et par $\bar{\gamma}$ la classe d'équivalence d'un élément $\gamma \in \mathbb{C}\pi$ dans $\mathbb{C}\pi$. Le crochet tel qu'énoncé ci-dessous est alors bien défini et satisfait aux axiomes d'un crochet de Lie.

Définition 3.5. Le *crochet de Goldman non orienté*, également noté $[\cdot, \cdot]$: $\mathbb{C}\pi \times \mathbb{C}\pi \rightarrow \mathbb{C}\pi$, est défini comme

$$[\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2] = \overline{\sum_{p_i \in \gamma_1 \cap \gamma_2} s_i \cdot (\gamma_1 \cdot_{p_i} \gamma_2 - \gamma_1 \cdot_{p_i} \gamma_2^{-1})}$$

où s_i est le facteur ± 1 désignant l'orientation au point p_i entre les représentants γ_1 et γ_2 .

Muni du crochet de Goldman non-orienté, $\mathbb{C}\pi$ est aussi une algèbre de Lie.

Exemple 3.6. Reprenons l'exemple 3.3 mais cette fois-ci pour le calcul du crochet de Goldman non orienté. On a

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \overline{ab - ab^{-1}}.$$

La figure 8 présente la courbe supplémentaire ab^{-1} qui n'était pas présente dans la figure 6.

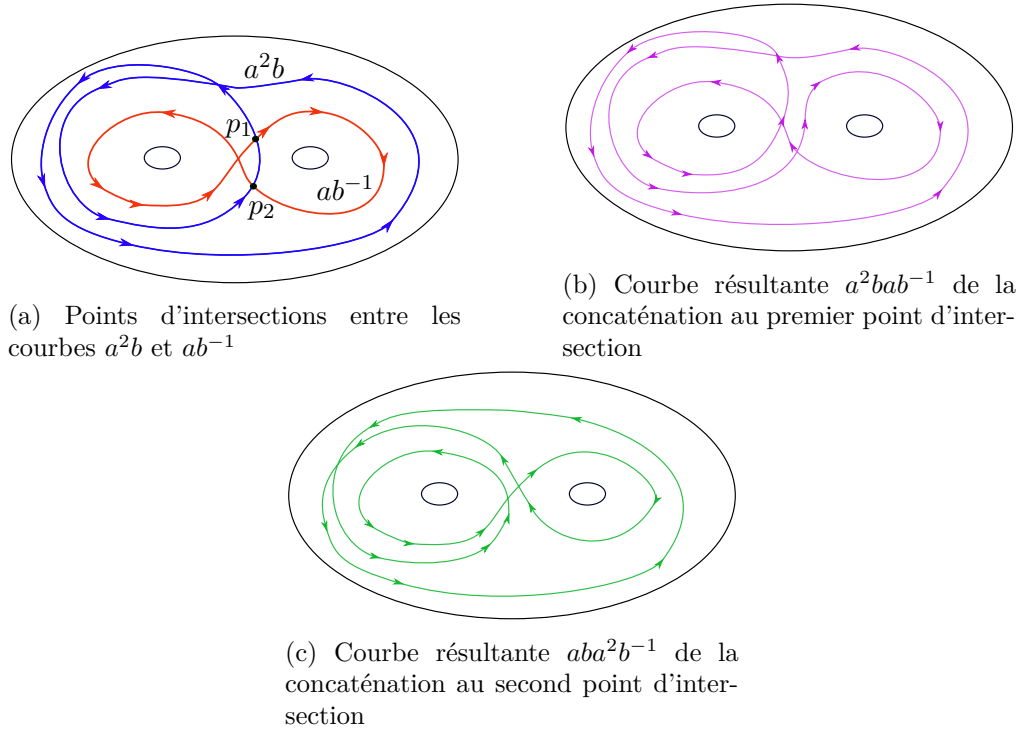


FIGURE 7 : Crochet de Goldman orienté des courbes a^2b et ab^{-1} sur la sphère à trois trous

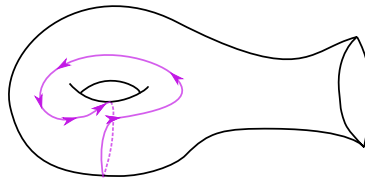
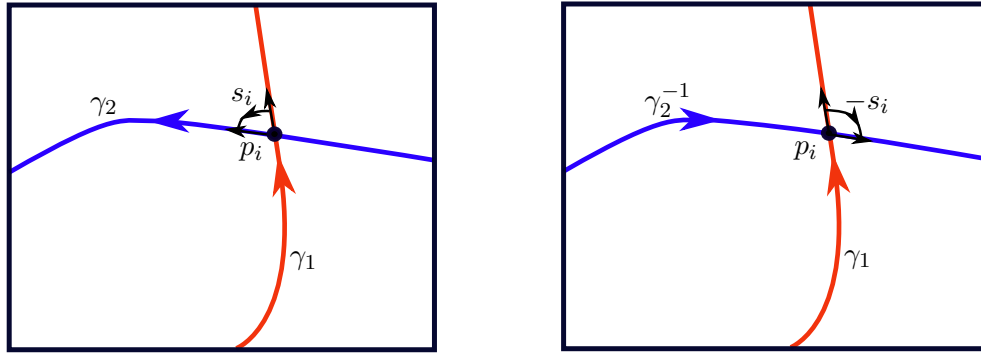


FIGURE 8 : Courbe ab^{-1}



(a) Point d'intersection entre γ_1 et γ_2

(b) Point d'intersection entre γ_1 et γ_2^{-1}

FIGURE 9 : Un point d'intersection entre γ_1 et γ_2 ou γ_2^{-1} et son signe associé

Lemme 3.7. *Il existe un représentant de γ_2^{-1} tel que les points d'intersection entre γ_1 et γ_2 sont les mêmes que ceux entre γ_1 et γ_2^{-1} . De plus, le signe s_i associé au point d'intersection p_i dans le crochet $[\gamma_1, \gamma_2]$ est opposé à celui associé au terme correspondant dans $[\gamma_1, \gamma_2^{-1}]$.*

Démonstration. Il suffit de considérer le même représentant de la classe de γ_2 mais parcouru dans le sens inverse. Comme on peut le constater sur la figure 9, le fait de parcourir γ_2 en sens inverse permet de conserver les mêmes points d'intersection mais modifie l'orientation à ce point. \square

Théorème 3.8. *Soient $\overline{\gamma_1}, \overline{\gamma_2} \in C\overline{\pi}$. Alors,*

$$[\overline{\gamma_1}, \overline{\gamma_2}] = \overline{[\gamma_1, \gamma_2]} + [\gamma_1, \gamma_2^{-1}]$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} [\overline{\gamma_1}, \overline{\gamma_2}] &= \overline{\sum_{p_i \in \gamma_1 \cap \gamma_2} s_i \cdot (\gamma_1 \cdot p_i \cdot \gamma_2 - \gamma_1 \cdot p_i \cdot \gamma_2^{-1})} \\ &= \overline{\sum_{p_i \in \gamma_1 \cap \gamma_2} s_i \cdot \gamma_1 \cdot p_i \cdot \gamma_2} + \sum_{p_i \in \gamma_1 \cap \gamma_2^{-1}} (-s_i) \cdot \gamma_1 \cdot p_i \cdot \gamma_2^{-1} \text{ par le lemme 3.7} \\ &= \overline{[\gamma_1, \gamma_2]} + [\gamma_1, \gamma_2^{-1}] \text{ par le lemme 3.7} \end{aligned} \quad \square$$

4 Algèbres et variétés

Définition 4.1. Une algèbre A sur un corps commutatif k , ou k -algèbre, est une structure algébrique $(A, +, \cdot, \times)$ telle que :

1. $(A, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur k ;
2. la loi \times est définie de $A \times A$ dans A (loi de composition interne) ;
3. la loi \times est bilinéaire.

Avant d'aborder le concept de variété de caractères, on doit considérer celui de variétés algébriques affines. Une variété algébrique affine est un sous-ensemble de \mathbb{C}^n défini par les zéros d'un ou plusieurs polynômes (dans cet article, toutes les variétés algébriques considérées seront affines). Par exemple, $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ est une variété algébrique de \mathbb{C}^4 étant donné que ce groupe est formé des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ satisfaisant l'équation $ad - bc - 1 = 0$.

Le groupe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ peut également être muni de la structure d'une variété algébrique dans $\mathbb{C}^{n^2+1} \cong \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}$ définie par les zéros du polynôme $p(M, z) = \det(M) \cdot z - 1$. Nous donnons ci-dessous des définitions de géométrie algébrique qui seront utiles dans cet article (pour plus de détails voir par exemple [Bum98, Sha13]).

Définition 4.2. Soit V une variété algébrique dans \mathbb{C}^n définie par les polynômes p_1, \dots, p_r . Son *algèbre de fonctions polynomiales*, notée $\mathbb{C}[V]$, est l'algèbre quotient

$$\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/(p_1, \dots, p_r)$$

où (p_1, \dots, p_r) est l'idéal engendré par les r polynômes p_i .

Une *application polynomiale* $f : V \rightarrow U$ entre deux variétés algébriques affines est la restriction d'une application polynomiale entre leurs espaces affines ambiants. Une application polynomiale induit un homomorphisme $f^* : \mathbb{C}[U] \rightarrow \mathbb{C}[V]$ entre leurs algèbres de fonctions par précomposition. Deux variétés algébriques sont *isomorphes* s'il existe une application polynomiale d'inverse polynomiale entre les deux. Dans ce cas, leurs algèbres de fonctions sont isomorphes.

Définition 4.3. Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps commutatif k . Il existe un espace vectoriel appelé le *produit tensoriel de E et F* , noté $E \otimes F$, et une application bilinéaire $\phi : E \times F \rightarrow E \otimes F$ définie par $\phi(x, y) = x \otimes y$ et ayant la propriété universelle suivante : pour tout espace vectoriel G sur k et pour toute application bilinéaire $g : E \times F \rightarrow G$, il existe une unique application linéaire $\tilde{g} : E \otimes F \rightarrow G$ telle que $g = \tilde{g} \circ \phi$.

Si E et F sont munis d'une structure d'algèbre, alors $E \otimes F$ est également une algèbre lorsque munie du produit $(x_1 \otimes y_1)(x_2 \otimes y_2) = (x_1 x_2) \otimes (y_1 y_2)$.

Exemple 4.4. Considérons le produit tensoriel de l'espace vectoriel \mathbb{R}^2 avec lui-même. Ainsi, un élément $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ peut s'écrire comme suit :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = ac \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + ad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + bc \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + bd \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^4$ avec la base donnée par $e_i \otimes e_j$.

Soient $V_1 \subset \mathbb{C}^n$ et $V_2 \subset \mathbb{C}^m$ deux variétés algébriques affines. Alors, leur produit $V_1 \times V_2$ est naturellement une variété algébrique affine dans \mathbb{C}^{n+m} .

Proposition 4.5 ([Bum98, Théorème 4.19]). *L'algèbre des fonctions polynomiales d'un produit de variétés est donnée par le produit tensoriel :*

$$\mathbb{C}[V_1 \times V_2] \cong \mathbb{C}[V_1] \otimes \mathbb{C}[V_2].$$

L'isomorphisme est donné par la formule

$$(f \otimes g)(u,v) = f(u)g(v).$$

4.1 Variété de caractères

Définition 4.6. Un *groupe de présentation finie* Γ est un quotient d'un groupe libre F_g par un sous-groupe distingué engendré par un nombre fini d'éléments. On note

$$\Gamma = \langle s_1, \dots, s_g \mid r_1 = 1, \dots, r_n = 1 \rangle = \langle s_1, \dots, s_g \rangle / \langle r_1, \dots, r_n \rangle,$$

où r_j sont des mots dans les lettres s_i .

Soit Γ un groupe de présentation finie. L'ensemble des homomorphismes de Γ vers un groupe algébrique G , noté $\text{Hom}(\Gamma, G)$, est également une variété algébrique (voir par exemple [Dol03]). Ses éléments sont des homomorphismes qui sont chacun définis uniquement par l'image des générateurs de Γ . Au cours de cet article, nous nous concentrerons sur les groupes algébriques suivants : $\text{SL}(2, \mathbb{C})$, $\text{GL}(2, \mathbb{C})$ et $\text{GL}(1, \mathbb{C})$.

On définit la variété de caractères de Γ vers G par $\chi(\Gamma, G) := \text{Hom}(\Gamma, G)/G$, c'est-à-dire que deux homomorphismes ρ et ρ' sont en relation si et seulement si il existe un élément $g \in G$ tel que $\rho(\gamma) = g\rho'(\gamma)g^{-1}$, $\forall \gamma \in \Gamma$.

Définition 4.7. Soit $\gamma \in \Gamma$ un élément quelconque et G un groupe algébrique de matrices. On définit les fonctions $\text{tr}_\gamma, \det_\gamma : \chi(\Gamma, G) \rightarrow \mathbb{C}$ par $\text{tr}_\gamma(\rho) = \text{tr}(\rho(\gamma))$ et $\det_\gamma(\rho) = \det(\rho(\gamma))$.

Pour $\Gamma = F_2$ et $G = \text{SL}(2, \mathbb{C})$, la variété de caractères a une description particulièrement simple donnée par le théorème suivant :

Théorème 4.8 ([Gol09]). *En tant que variétés algébriques, $\chi(F_2, \text{SL}(2, \mathbb{C})) \cong \mathbb{C}^3$. L'isomorphisme est donné par l'application $\phi : \chi(F_2, \text{SL}(2, \mathbb{C})) \rightarrow \mathbb{C}^3$ définie par $\phi(\rho) = (\text{tr}_a(\rho), \text{tr}_b(\rho), \text{tr}_{ab}(\rho))^t$.*

Théorème 4.9. *En tant que variétés algébriques, $\chi(F_2, \text{GL}(2, \mathbb{C})) \cong \mathbb{C}^3 \times (\mathbb{C}^*)^2 / \sim$ (voir par exemple [FL12]). On peut utiliser les coordonnées $x = \text{tr}_a, y = \text{tr}_b, z = \text{tr}_{ab}, u = \det_a$ et $v = \det_b$. Dans ce cas, la relation d'équivalence \sim est donnée par :*

$$(x, y, z, u, v) \sim (-x, y, -z, -u, v) \sim (x, -y, -z, u, -v) \sim (-x, -y, z, -u, -v).$$

Plus généralement, on a le théorème suivant.

Théorème 4.10 ([DCP17]). *Les algèbres des fonctions polynomiales sur les variétés de caractères $\chi(\Gamma, \text{SL}(n, \mathbb{C}))$ et $\chi(\Gamma, \text{GL}(n, \mathbb{C}))$ sont engendrées par l'ensemble des fonctions de trace tr_γ .*

4.2 Identités de traces

Le théorème 4.10 présente l'importance que prennent les fonctions de trace. Ainsi, présentons ici quelques identités et formules de traces de matrices qui nous seront utiles.

Rappelons d'abord que la fonction de trace est invariante par conjugaison, c'est-à-dire que $\text{tr}(MAM^{-1}) = \text{tr}(A)$. De plus, $\forall A, B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$, on a que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

Théorème 4.11 (Théorème de Cayley-Hamilton). *Soit $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ et soit $p(X) = X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \dots + c_1X + c_0$, $c_i \in \mathbb{C}$, son polynôme caractéristique. Alors, $p(A) = 0_{n \times n}$.*

Au cours de cet article, nous nous intéresserons principalement aux matrices carrées de dimension deux. Nous considérerons surtout les deux groupes de matrices suivants, dont le premier est inclus dans le second : $\text{SL}(2, \mathbb{C}) = \{A \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C}) \mid \det(A) = 1\}$ et $\text{GL}(2, \mathbb{C}) = \{A \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C}) \mid \det(A) \neq 0\}$. Ces groupes sont appelés respectivement le groupe spécial linéaire et le groupe général linéaire. De plus, nous utiliserons le groupe $\text{GL}(1, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^*$.

Corollaire 4.12. *Soit $A \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$. Alors, $A^2 - \text{tr}(A)A + \det(A)\mathbb{I} = 0$.*

Démonstration. Le polynôme caractéristique de A est donné par :

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda\mathbb{I}) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc \\ &= \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A)\mathbb{I}. \end{aligned}$$

Ainsi, par le théorème 4.11, on a la conclusion souhaitée. \square

Le corollaire 4.12 permet alors de prouver le résultat suivant.

Théorème 4.13 (Identité de base). *Soient $A, B \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$. Alors,*

$$\text{tr}(A)\text{tr}(B) = \text{tr}(AB) + \det(A)\text{tr}(A^{-1}B).$$

Démonstration. À partir du corollaire 4.12, on a

$$\begin{aligned} 0 &= A^2 - \text{tr}(A)A + \det(A)\mathbb{I} \\ &= (BA^{-1})(A^2 - \text{tr}(A)A + \det(A)\mathbb{I}) \\ &= BA - \text{tr}(A)B + \det(A)BA^{-1} \\ \Rightarrow 0 &= \text{tr}(BA) - \text{tr}(A)\text{tr}(B) + \det(A)\text{tr}(BA^{-1}) \end{aligned}$$

d'où $\text{tr}(A)\text{tr}(B) = \text{tr}(AB) + \det(A)\text{tr}(A^{-1}B)$. \square

Cette identité permet de simplifier les calculs de traces et sera amplement utilisée plus tard dans des preuves.

Voici un exemple d'une autre identité pouvant être déduite du corollaire 4.12.

Exemple 4.14.

$$\begin{aligned}
A^2 - \operatorname{tr}(A)A + \det(A)\mathbb{I} = 0 &\Rightarrow (A^2 - \operatorname{tr}(A)A + \det(A)\mathbb{I})B = 0 \cdot B \\
&\Rightarrow A^2B - \operatorname{tr}(A)AB + \det(A)B = 0 \\
&\Rightarrow \operatorname{tr}(A^2B) - \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(AB) + \det(A)\operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}(0) \\
&\Rightarrow \operatorname{tr}(A^2B) = \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(AB) - \det(A)\operatorname{tr}(B)
\end{aligned}$$

Remarquons que lorsqu'on travaille avec des matrices de $\operatorname{SL}(2, \mathbb{C})$, les identités sont largement simplifiées car les déterminants valent un.

5 Variété de caractères $\operatorname{GL}(2, \mathbb{C})$

Le but de cette section est d'établir un lien entre les variétés de caractères dans les groupes $\operatorname{SL}(2, \mathbb{C})$, \mathbb{C}^* , $\{-1, 1\}$ et $\operatorname{GL}(2, \mathbb{C})$. Nous allons d'abord montrer le théorème qui suit :

Théorème 5.1. *Soit $\Gamma = \pi_1(\Sigma)$ le groupe fondamental d'une surface. Alors,*

$$\chi(\Gamma, \operatorname{GL}(2, \mathbb{C})) \cong (\chi(\Gamma, \operatorname{SL}(2, \mathbb{C})) \times \chi(\Gamma, \mathbb{C}^*)) / \chi(\Gamma, \{-1, 1\}).$$

Nous en déduisons ensuite le théorème suivant :

Théorème 5.2. *Soit $\Gamma = \pi_1(\Sigma)$ le groupe fondamental d'une surface. Alors,*

$$\mathbb{C}[\chi(\Gamma, \operatorname{GL}(2, \mathbb{C}))] \cong (\mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*)] \otimes \mathbb{C}[\chi(\Gamma, \operatorname{SL}(2, \mathbb{C}))])^{\chi(\Gamma, \{-1, 1\})}.$$

Les prochaines sous-sections vont fournir les outils permettant de démontrer ces théorèmes.

5.1 Action de groupe de $\chi(\Gamma, \{-1, 1\})$

L'intuition derrière le théorème 5.1 vient du fait qu'une matrice de $\operatorname{GL}(2, \mathbb{C})$ peut s'écrire comme une matrice de $\operatorname{SL}(2, \mathbb{C})$ multipliée par la racine de son déterminant, car pour M une matrice 2×2 et k un scalaire, $\det(kM) = k^2 \det(M)$. Cependant, comme il y a deux choix de racines pour le déterminant, on doit d'abord aborder les homomorphismes de Γ vers le groupe multiplicatif $\{-1, 1\}$, noté $\operatorname{Hom}(\Gamma, \{-1, 1\})$. Cet ensemble est en fait un groupe multiplicatif pour l'opération $(a * b)(w) = a(w) * b(w)$.

On peut prouver aisément que $\operatorname{Hom}(\Gamma, \{-1, 1\}) \cong \chi(\Gamma, \{-1, 1\})$ puisque pour $\beta \in \operatorname{Hom}(\Gamma, \{-1, 1\})$ et $w \in \Gamma$, $(z\beta z^{-1})(w) = z\beta(w)z^{-1} = zz^{-1}\beta(w) = \beta(w) \forall z \in \mathbb{C}^*$. Ainsi, chaque classe d'équivalence de $\chi(\Gamma, \{-1, 1\})$ ne contient qu'un seul représentant.

On souhaite étudier l'action du groupe $\chi(F_2, \{-1, 1\})$ sur les variétés $\chi(F_2, \mathbb{C}^*)$, $\chi(F_2, \operatorname{SL}(2, \mathbb{C}))$ et $\chi(F_2, \mathbb{C}^*) \times \chi(F_2, \operatorname{SL}(2, \mathbb{C}))$. Pour ce faire, définissons d'abord ce qu'est une action de groupe à gauche.

Définition 5.3. Soit G un groupe et X un ensemble. Alors, l'opérateur $\star : G \times X \rightarrow X$ est une *action de groupe à gauche* sur X si :

1. $g_1 \star (g_2 \star x) = (g_1 g_2) \star x \quad \forall g_1, g_2 \in G, \forall x \in X$;
2. $e \star x = x \quad \forall x \in X$, où e est l'élément neutre de G .

On dit que G agit sur X .

Il y a plusieurs manières de définir des actions de groupes à partir d'actions connues.

- Si G agit sur un ensemble S , alors il agit aussi sur n'importe quel ensemble de fonctions $\text{Fon}(S, T)$, pour T un ensemble quelconque. L'action est définie par $(\beta \star f)(s) := f(\beta^{-1} \star s)$. Par exemple, si G agit sur une variété V , alors il agit également sur son algèbre de fonctions polynomiales $\mathbb{C}[V]$.
- Si G agit sur deux ensembles S et T , alors G agit sur leur produit $S \times T$ par $\beta \star (s, t) := (\beta \star s, \beta \star t)$.
- Si G agit sur les ensembles S et T , alors G agit sur $\mathbb{C}[S] \otimes \mathbb{C}[T]$ par l'action $\beta \star (f \otimes g) = \beta \star f \otimes \beta \star g$.

Définition 5.4. Si G agit sur X , alors le *quotient* X/G est l'ensemble des classes d'équivalences X/\sim , où $x \sim y \iff \exists g \in G$ tel que $x = g \star y$.

Soit G un groupe fini agissant sur une variété algébrique V par automorphismes polynomiaux. Alors, le quotient V/G est également muni d'une structure de variété algébrique naturelle [Sha13, p. 30 exemple 11]. Son algèbre de fonctions polynomiales est l'algèbre des invariants :

Proposition 5.5. Notons par $\mathbb{C}[V]^G$ l'algèbre des fonctions G -invariantes sur V , c'est-à-dire des fonctions polynomiales $f \in \mathbb{C}[V]$ telles que $f(gx) = f(x)$ pour tout $g \in G$. Alors,

$$\mathbb{C}[V/G] \cong \mathbb{C}[V]^G.$$

Nous souhaitons maintenant définir une action du groupe $\chi(\Gamma, \{-1, 1\})$ sur $\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*) \times \chi(\Gamma, \text{SL}(2, \mathbb{C}))$. Pour ce faire, nous aurons besoin des deux lemmes suivants. On définit $\beta \star \sigma(w) := \beta(w)\sigma(w)$ pour $\beta \in \text{Hom}(\Gamma, \{-1, 1\})$ et $\sigma \in \text{Hom}(\Gamma, \text{SL}(2, \mathbb{C}))$.

Lemme 5.6. Soient $\beta \in \text{Hom}(\Gamma, \{-1, 1\})$ et $\sigma \in \text{Hom}(\Gamma, \text{SL}(2, \mathbb{C}))$. Alors, $\beta \star \sigma \in \text{Hom}(\Gamma, \text{SL}(2, \mathbb{C}))$.

Démonstration.

Montrons que $\beta \star \sigma$ est bien un homomorphisme. Soient $w_1, w_2 \in \Gamma$. Alors,

$$\begin{aligned} (\beta \star \sigma)(w_1 w_2) &= \beta(w_1 w_2) \sigma(w_1 w_2) = \beta(w_1) \beta(w_2) \sigma(w_1) \sigma(w_2) \\ &= \beta(w_1) \sigma(w_1) \beta(w_2) \sigma(w_2) = (\beta \star \sigma)(w_1) (\beta \star \sigma)(w_2). \end{aligned}$$

Cela découle de la commutativité des éléments de $\{-1, 1\}$ avec eux-mêmes et les matrices. Ensuite, puisque si $A \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$, alors $-A \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$, on a que $\beta \star \sigma(w) = \beta(w)\sigma(w) \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$. Ainsi, $\beta \star \sigma \in \text{Hom}(\Gamma, \text{SL}(2, \mathbb{C}))$. Cela est équivalent à dire que $\beta\sigma \in \text{Hom}(\Gamma, \text{SL}(2, \mathbb{C}))$. \square

Lemme 5.7. *L'application $\star : \chi(\Gamma, \{-1, 1\}) \times \chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})) \rightarrow \chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$, telle que $(\beta, \sigma) \mapsto \beta \star \sigma = \beta \sigma$, est bien définie.*

Démonstration.

On veut montrer que $\beta \star \sigma \in \chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$. Soit $H\sigma H^{-1}$ un autre représentant de la classe d'équivalence de $\sigma \in \chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$, où $H \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. Alors, $\forall w \in \Gamma$, $\beta \star (H\sigma H^{-1})(w) = \beta(w)H\sigma(w)H^{-1} = H\beta(w)\sigma(w)H^{-1} = H(\beta \star \sigma)(w)H^{-1}$. \square

Par un raisonnement similaire, on peut montrer que $\beta \star \eta \in \chi(\Gamma, \mathbb{C}^*)$. Ainsi, l'application \star est bien définie pour $\chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$ et $\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*)$. De plus, par un calcul de routine, on peut prouver qu'elle définit en fait une action de groupe sur ces deux espaces. On peut donc également faire agir $\chi(\Gamma, \{-1, 1\})$ sur le produit d'algèbres $\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*) \times \chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$ en agissant sur chacun des facteurs.

5.2 Isomorphisme avec le produit tensoriel

Lemme 5.8. *Soit $\Gamma = \pi_1(\Sigma)$ et $\eta : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}^*$ un homomorphisme. Alors, il existe une racine carrée de η , c'est-à-dire un homomorphisme $\sqrt{\eta} : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}^*$ tel que $\sqrt{\eta}^2 = \eta$.*

Démonstration. Si Σ est à bord non vide, alors son groupe fondamental est libre à g générateurs a_1, \dots, a_g . On choisit arbitrairement une racine carrée $\sqrt{\eta(a_i)}$ pour $i = 1, \dots, g$ et ce choix s'étend uniquement en un homomorphisme $\sqrt{\eta} : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}^*$.

Si Σ est une surface fermée, alors son groupe fondamental a la présentation suivante :

$$\langle a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g \mid [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] \rangle,$$

où $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$. Encore une fois, en choisissant arbitrairement une racine carrée $\sqrt{a_i}, \sqrt{b_i}$ on obtient un homomorphisme puisque

$$\sqrt{\eta(a_i)}\sqrt{\eta(b_i)}\sqrt{\eta(a_i)}^{-1}\sqrt{\eta(b_i)}^{-1} = 1. \quad \square$$

On peut maintenant démontrer le théorème 5.1.

Démonstration du théorème 5.1.

Considérons l'application

$$\psi : (\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*) \times \chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))) / \chi(\Gamma, \{-1, 1\}) \rightarrow \chi(\Gamma, \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})), \quad (\eta, \sigma) \mapsto \eta \sigma.$$

Montrons d'abord qu'elle est bien définie.

Soient $w \in \Gamma$, $\eta, \eta_1 \in \chi(\Gamma, \mathbb{C}^*)$ et $\sigma, \sigma_1 \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$.

Alors,

$$\begin{aligned} (\eta, \sigma) \sim (\eta_1, \sigma_1) &\iff \exists \beta \in \chi(\Gamma, \{-1, 1\}) \text{ et } N \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \\ &\text{tels que } (\eta, \sigma) = (\beta \star \eta_1, \beta \star N \sigma_1 N^{-1}). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\eta\sigma(w) &= \eta(w)\sigma(w) \\
&= \beta(w)\eta_1(w)\beta(w)N\sigma_1(w)N^{-1} \\
&= \beta(w)^2\eta_1(w)N\sigma_1(w)N^{-1} \\
&= N\eta_1(w)\sigma_1(w)N^{-1}
\end{aligned}$$

et comme $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \subseteq \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$, on a que $N \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$, donc $\eta\sigma \sim \eta_1\sigma_1$ et ainsi ψ est bien définie.

Également, ψ est un homomorphisme :

$$\begin{aligned}
\psi((\eta, \sigma))(w_1 w_2) &= (\eta\sigma)(w_1 w_2) = \eta(w_1 w_2)\sigma(w_1 w_2) = \eta(w_1)\eta(w_2)\sigma(w_1)\sigma(w_2) \\
&= \eta(w_1)\sigma(w_1)\eta(w_2)\sigma(w_2) = \psi((\eta, \sigma))(w_1)\psi((\eta, \sigma))(w_2).
\end{aligned}$$

Montrons maintenant l'injectivité de ψ . On a

$$\begin{aligned}
\psi((\eta, \sigma)) &\sim \psi((\eta_1, \sigma_1)) \\
&\iff \exists M \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) \text{ t.q. } \psi((\eta, \sigma)) \equiv M\psi((\eta_1, \sigma_1))M^{-1} \\
&\iff \psi((\eta, \sigma))(w) = M\psi((\eta_1, \sigma_1))(w)M^{-1}, \forall w \in \Gamma \\
&\Rightarrow \eta\sigma(w) = M\eta_1\sigma_1(w)M^{-1}, \forall w \in \Gamma \\
&\Rightarrow \eta(w)\sigma(w) = M\eta_1(w)\sigma_1(w)M^{-1}, \forall w \in \Gamma \\
&\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\eta(w)}{\eta_1(w)} & 0 \\ 0 & \frac{\eta(w)}{\eta_1(w)} \end{pmatrix} = \sigma^{-1}(w)M\sigma_1(w)M^{-1}, \forall w \in \Gamma.
\end{aligned}$$

En prenant le déterminant de chaque côté, on déduit l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} \frac{\eta_1(w)}{\eta(w)} & 0 \\ 0 & \frac{\eta_1(w)}{\eta(w)} \end{pmatrix} &= \det(\sigma^{-1}(w)M\sigma_1(w)M^{-1}) = 1, \forall w \in \Gamma \\
\Rightarrow \frac{\eta_1(w)^2}{\eta(w)^2} &= 1, \forall w \in \Gamma \\
\Rightarrow \eta_1(w)^2 &= \eta(w)^2, \forall w \in \Gamma \\
\Rightarrow \eta_1(w) &= \epsilon(w)\eta(w), \forall w \in \Gamma \text{ et où } \epsilon = \frac{\eta_1}{\eta} \in \chi(\Gamma, \{-1, 1\}).
\end{aligned}$$

Ainsi, de l'équation $\eta(w)\sigma(w) = M\eta_1(w)\sigma_1(w)M^{-1}$, on obtient en choisissant une racine carrée $\sqrt{\det(M)}$ de $\det(M)$ que

$$\begin{aligned}
\eta(w)\sigma(w) &= M(\epsilon(w)\eta(w))\sigma_1(w)M^{-1}, \forall w \in \Gamma \\
\Rightarrow \sigma(w) &= \epsilon(w)M\sigma_1(w)M^{-1}, \forall w \in \Gamma \\
&= \epsilon(w)\sqrt{\det(M)}\frac{M}{\sqrt{\det(M)}}\sigma_1(w)\sqrt{\det(M)}^{-1}\frac{M^{-1}}{\sqrt{\det(M)}^{-1}}, \forall w \in \Gamma \\
&= \epsilon(w)N\sigma_1(w)N^{-1}, \text{ où } N = \frac{M}{\sqrt{\det(M)}} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}).
\end{aligned}$$

Ainsi, l'homomorphisme ϵ est tel que $(\eta, \sigma) = (\epsilon \star \eta_1, \epsilon \star N\sigma_1 N^{-1})$, i.e $(\eta, \sigma) \sim (\eta_1, \sigma_1)$. Ceci implique donc que ψ est bien injective.

Finalement, démontrons sa surjectivité. Soit $\rho \in \chi(\Gamma, \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}))$ et choisissons une racine carrée de l'homomorphisme $\det \circ \rho$, qui existe par le lemme 5.8. Posons

$$(\eta, \sigma) = \left(\sqrt{\det(\rho)}, \frac{\rho}{\sqrt{\det(\rho)}} \right) \in (\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*) \times \chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))) / \chi(\Gamma, \{-1, 1\}).$$

Alors, $\psi(\eta, \sigma)(w) = \eta\sigma(w) = \sqrt{\det(\rho(w))} \frac{\rho(w)}{\sqrt{\det(\rho(w))}} = \rho(w)$, $\forall w \in \Gamma$ et donc ψ est surjective. \square

On peut donc déduire le théorème 5.2 avec la justification suivante.

Démonstration du théorème 5.2.

Comme $(\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*) \times \chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))) / \chi(\Gamma, \{-1, 1\}) \cong \chi(\Gamma, \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}))$ par le théorème 5.1, on a donc que les algèbres de fonctions polynomiales sur ces variétés de caractères sont isomorphes, c'est-à-dire que

$$\mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}))] \cong \mathbb{C}[(\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*) \times \chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))) / \chi(\Gamma, \{-1, 1\})].$$

On déduit ainsi des propositions 4.5 et 5.5 que

$$\mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}))] \cong \mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*)] \otimes \mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))]^{\chi(\Gamma, \{-1, 1\})}. \quad \square$$

6 Crochets de Poisson

Nous allons maintenant définir l'outil principal sur lequel porte notre article : le crochet de Poisson sur l'algèbre des fonctions d'une variété de caractères. On doit d'abord définir ce qu'est une algèbre de Poisson.

Définition 6.1. Une *algèbre de Poisson* P est une algèbre munie d'un crochet de Poisson, noté $\{\cdot, \cdot\}$, qui est un crochet de Lie satisfaisant de plus la règle de Leibniz, c'est-à-dire que $\{f \times g, h\} = f \times \{g, h\} + g \times \{f, h\}$, $\forall f, g, h \in P$.

En général, dans cet article, le crochet de Poisson est l'application $\{\cdot, \cdot\} : \mathbb{C}[V] \times \mathbb{C}[V] \rightarrow \mathbb{C}[V]$, où V est une variété algébrique. Une façon de le définir est la suivante : $\{f, g\} = \langle \nabla f \times \nabla g, H \rangle$, où H est une fonction compatible avec le produit scalaire et ∇ désigne la fonction du gradient qui est bien définie sur les algèbres de fonctions polynomiales $\mathbb{C}[V]$. On notera que le vecteur H change dépendamment de la surface sur laquelle on travaille. Le but de cet article est de prouver qu'en définissant une nouvelle application de $\mathbb{C}[V] \times \mathbb{C}[V]$ dans $\mathbb{C}[V]$ à l'aide du crochet de Goldman, cette définition satisfera les propriétés d'un crochet de Poisson. Nous nous intéresserons notamment aux crochets de Poisson sur $\mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))]$, $\mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*)]$ et $\mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}))]$.

Nous présentons ici les définitions usuelles des crochets de Poisson sur les trois espaces mentionnés précédemment. Dans les sections 6.1, 6.2 et 6.3, nous montrerons que le crochet de Goldman permet de définir des crochets de Poisson sur ces algèbres.

Définition 6.2. Le crochet de Poisson

$$\{\cdot, \cdot\} : \mathbb{C}[\chi(F_2, \text{SL}(2, \mathbb{C}))] \times \mathbb{C}[\chi(F_2, \text{SL}(2, \mathbb{C}))] \rightarrow \mathbb{C}[\chi(F_2, \text{SL}(2, \mathbb{C}))]$$

est défini ainsi :

$$\{\text{tr}_u, \text{tr}_v\} = \langle \nabla \text{tr}_u \times \nabla \text{tr}_v, H \rangle = \left| \nabla \text{tr}_u \quad \nabla \text{tr}_v \quad H \right|$$

où \times désigne le produit vectoriel usuel dans \mathbb{C}^3 . Comme $\chi(F_2, \text{SL}(2, \mathbb{C})) \cong \mathbb{C}^3$, tr_u et tr_v peuvent être vues comme des fonctions de \mathbb{C}^3 vers \mathbb{C} . Par exemple, sur le tore à un trou, $H(x, y, z) = (2x - yz, 2y - xz, 2z - xy)^t$, où $x = \text{tr}_a(\sigma)$, $y = \text{tr}_b(\sigma)$, $z = \text{tr}_{ab}(\sigma)$.

Exemple 6.3. Calculons le crochet de Poisson entre les fonctions tr_{a^2} et tr_b sur le tore à un trou dans $\mathbb{C}[\chi(F_2, \text{SL}(2, \mathbb{C}))] \times \mathbb{C}[\chi(F_2, \text{SL}(2, \mathbb{C}))]$.

Soit $\sigma \in \chi(F_2, \text{SL}(2, \mathbb{C}))$. Par la définition 6.2, on a :

$$\begin{aligned} \{\text{tr}_{a^2}, \text{tr}_b\} &= \{\text{tr}_a^2 - 2, \text{tr}_b\} \text{ par application du théorème 4.13} \\ &= \{x^2 - 2, y\} \\ &= \begin{vmatrix} 2x & 0 & 2x - yz \\ 0 & 1 & 2y - xz \\ 0 & 0 & 2z - xy \end{vmatrix} \\ &= 2x(2z - xy) \\ &= 4xz - 2x^2y. \end{aligned}$$

Définition 6.4. Le crochet de Poisson

$$\{\cdot, \cdot\} : \mathbb{C}[\chi(F_2, \text{GL}(2, \mathbb{C}))] \times \mathbb{C}[\chi(F_2, \text{GL}(2, \mathbb{C}))] \rightarrow \mathbb{C}[\chi(F_2, \text{GL}(2, \mathbb{C}))]$$

est défini par

$$\{\text{tr}_u, \text{tr}_v\} = \langle \nabla \text{tr}_u \times \nabla \text{tr}_v, H \rangle.$$

On définit ici le produit vectoriel dans \mathbb{C}^5 par

$$r \times s = (v_{1,2}, v_{1,3}, v_{1,4}, v_{1,5}, v_{2,3}, v_{2,4}, v_{2,5}, v_{3,4}, v_{3,5}, v_{4,5})^t, \text{ où } v_{i,j} = r_i s_j - r_j s_i.$$

On sait par le théorème 4.9 que $\chi(F_2, \text{GL}(2, \mathbb{C})) \cong \mathbb{C}^3 \times (\mathbb{C}^*)^2 / \sim$. Pour le tore à un trou,

$$H(x, y, z, u, v) = (z, -yu + xz, 0, xv, xv - yz, -yu, 0, -zu, zv, 2uv)^t.$$

Définition 6.5. Le crochet de Poisson

$$\{\cdot, \cdot\} : \mathbb{C}[\chi(F_2, \text{GL}(1, \mathbb{C}))] \times \mathbb{C}[\chi(F_2, \text{GL}(1, \mathbb{C}))] \rightarrow \mathbb{C}[\chi(F_2, \text{GL}(1, \mathbb{C}))]$$

est défini par

$$\{\text{tr}_u, \text{tr}_v\} = \langle \nabla \text{tr}_u \times \nabla \text{tr}_v, H \rangle.$$

Pour le tore à un trou, $H = (\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z})^t$, où $x = \text{tr}_a$, $y = \text{tr}_b$ et $z = \text{tr}_{a^{-1}b^{-1}}$.

Nous arrivons maintenant au théorème principal qui motive cet article. Il permettra de définir de nouveaux crochets sur $\mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*)]$, $\mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))]$ et $\mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}))]$ et de démontrer que ce sont des crochets de Poisson qui font de nos espaces des algèbres de Poisson.

Théorème 6.6. [Gol86]

1. Soit $V = \chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$. Alors,

$$\mathrm{tr}_{[\bar{u}, \bar{v}]} = \{\mathrm{tr}_u, \mathrm{tr}_v\}.$$

2. Soit $V = \chi(\Gamma, \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}))$, $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\mathrm{tr}_{[u, v]} = \{\mathrm{tr}_u, \mathrm{tr}_v\}.$$

Exemple 6.7. On peut vérifier le théorème 6.6 sur l'exemple 6.3. En effet, le crochet de Goldman non orienté entre les courbes a^2 et b est :

$$[a^2, b] = 2(a^2b - a^2b^{-1}).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}_{[a^2, b]} &= 2\mathrm{tr}_{a^2b - a^2b^{-1}} \\ &= 2(\mathrm{tr}_{a^2b} - \mathrm{tr}_{a^2b^{-1}}) \\ &= 2(\mathrm{tr}_{a^2b} - (\mathrm{tr}_{a^2}\mathrm{tr}_b - \mathrm{tr}_{a^2b})) \\ &= 2(2\mathrm{tr}_{a^2b} - \mathrm{tr}_b(\mathrm{tr}_a^2 - 2)) \\ &= 4\mathrm{tr}_a\mathrm{tr}_{ab} - 4\mathrm{tr}_b - 2\mathrm{tr}_b\mathrm{tr}_a^2 + 4\mathrm{tr}_b \\ &= 4\mathrm{tr}_a\mathrm{tr}_{ab} - 2\mathrm{tr}_b\mathrm{tr}_a^2 \\ &= 4xz - 2x^2y. \end{aligned}$$

On a donc bien $\{\mathrm{tr}_{a^2}, \mathrm{tr}_b\} = \mathrm{tr}_{[a^2, b]}$.

À priori, il n'est pas clair que la trace du crochet de Goldman est un crochet de Poisson pour ces différents espaces. C'est ce que nous démontrerons dans ce qui suit.

6.1 Crochet de Poisson sur $\mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))]$

En s'inspirant du théorème 6.6, on souhaite démontrer le théorème suivant :

Théorème 6.8. Soit $\Gamma = \pi_1(\Sigma)$ le groupe fondamental d'une surface. Alors, l'application

$$\{\cdot, \cdot\}_{\mathrm{SL}} : \mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))] \times \mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))] \rightarrow \mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))]$$

définie par

$$\{\mathrm{tr}_u, \mathrm{tr}_v\}_{\mathrm{SL}} := \mathrm{tr}_{[\bar{u}, \bar{v}]}$$

et étendue par linéarité est un crochet de Poisson.

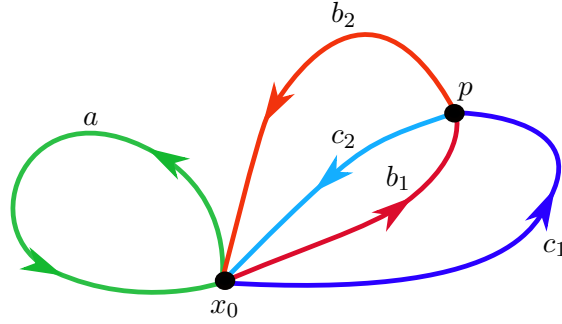


FIGURE 10 : Séparation des courbes ab (ou ba) et c par un point d'intersection entre b (en rouge) et c (en bleu)

Grâce à l'identité de matrices dans $SL(2, \mathbb{C})$ suivante :

$$\text{tr}(A)\text{tr}(B) = \text{tr}(AB) + \text{tr}(A^{-1}B),$$

on déduit que l'algèbre $\mathbb{C}[\chi(\Gamma, SL(2, \mathbb{C}))]$ est engendrée en tant qu'espace vectoriel par les fonctions de traces. Ainsi, $\{\cdot, \cdot\}_{SL}$ est bien définie.

Avant de présenter la démonstration du théorème 6.8, nous présentons une proposition et un lemme.

Lemme 6.9. *Soient $b, c \in \pi_1(\Sigma, x_0)$ et $p \in b \cap c$ un point d'intersection. Alors, $\exists g \in \pi_1(\Sigma, x_0)$ tel que $\forall a \in \pi_1(\Sigma, x_0)$, $ab \cdot_p c \sim bageg^{-1}$. En particulier, si $a = id$, alors $b \cdot_p c \sim bgeg^{-1}$. De même, $\exists h \in \pi_1(\Sigma, x_0)$ tel que $\forall a \in \pi_1(\Sigma, x_0)$, $ba \cdot_p c \sim bahch^{-1}$ et $b \cdot_p c \sim bhch^{-1}$.*

Démonstration. L'idée de la preuve peut se visualiser sur la figure 10. On a que le point p sépare les courbes b et c en deux segments, le premier reliant x_0 et p en suivant la courbe b ou c puis le second reliant p et x_0 en suivant la courbe b ou c . On notera ces segments pour b et c respectivement b_1 et b_2 et c_1 et c_2 . On a donc que $b_1b_2 = b$ et $c_1c_2 = c$. Ainsi,

$$ab \cdot_p c \sim b_1(b_2ab_1c_2c_1)b_1^{-1} = bab_1c_2c_1b_1^{-1} = bab_1c_2c_1c_2c_2^{-1}b_1^{-1} = bageg^{-1}$$

où $g = b_1c_2$. De plus,

$$b \cdot_p c \sim b_1(b_2b_1c_2c_1)b_1^{-1} = bb_1c_2c_1c_2c_2^{-1}b_1^{-1} = bgecb^{-1}.$$

L'idée de la preuve pour $ba \cdot_p c$ est similaire et laissée au lecteur. \square

Lemme 6.10. *Soient $u, v, w \in \pi_1(\Sigma) = \Gamma$. Choisissons des représentants de u, v et w de sorte qu'il n'y ait pas d'intersection triple (Figure 4). Si p est un point d'intersection entre les courbes u et w , alors*

$$\text{tr}_{uv \cdot_p w} + \text{tr}_{uv^{-1} \cdot_p w} = \text{tr}_v \text{tr}_{u \cdot_p w}.$$

Si q est un point d'intersection entre v et w , alors

$$\text{tr}_{uv \cdot_q w} + \text{tr}_{uv^{-1} \cdot_q w} = \text{tr}_u \text{tr}_{v \cdot_q w}.$$

Démonstration. Pour p un point d'intersection entre u et w , on peut écrire $uw \cdot_p w = uz w z^{-1}$, $u \cdot_p w = uz w z^{-1}$ et $uw^{-1} \cdot_p w = uv^{-1} z w z^{-1}$ pour $z \in \Gamma$ par le lemme 6.9. Ainsi, soit $\sigma \in \chi(\Gamma, \text{SL}(2, \mathbb{C}))$ tel que $\sigma(u) = U, \sigma(v) = V, \sigma(w) = W$ et $\sigma(z) = Z$. Alors, $\sigma(uw \cdot_p w) = UVZWZ^{-1}$, $\sigma(u \cdot_p w) = UZWZ^{-1}$ et $\sigma(uw^{-1} \cdot_p w) = UV^{-1}ZWZ^{-1}$. On a donc

$$\begin{aligned} \text{tr}(\sigma(uw \cdot_p w)) + \text{tr}(\sigma(uw^{-1} \cdot_p w)) &= \text{tr}(UVZWZ^{-1}) + \text{tr}(UV^{-1}ZWZ^{-1}) \\ &= \text{tr}(VZWZ^{-1}U) + \text{tr}(V^{-1}ZWZ^{-1}U) \\ &= \text{tr}(V)\text{tr}(ZWZ^{-1}U) \\ &= \text{tr}(V)\text{tr}(UZWZ^{-1}) \\ &= \text{tr}(\sigma(v))\text{tr}(\sigma(u \cdot_p w)). \end{aligned}$$

De façon similaire, on prouve la seconde équation pour q un point d'intersection entre v et w . \square

On peut maintenant prouver que la fonction définie au théorème 6.8 est un crochet de Poisson.

Démonstration du théorème 6.8. Soient $\text{tr}_u, \text{tr}_v, \text{tr}_w \in \mathbb{C}[\chi(\Gamma, \text{SL}(2, \mathbb{C}))]$. Alors, $\exists U, V, W \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ tels que $\text{tr}_u(\sigma) = U$, $\text{tr}_v(\sigma) = V$ et $\text{tr}_w(\sigma) = W$ pour $\sigma \in \chi(\Gamma, \text{SL}(2, \mathbb{C}))$. Démontrons que notre crochet satisfait les quatre propriétés d'un crochet de Poisson.

1. La bilinéarité est satisfaite par définition.
2. Antisymétrie :

$$\{\text{tr}_u, \text{tr}_v\}_{\text{SL}} = \text{tr}_{[\bar{u}, \bar{v}]} = \text{tr}_{-[\bar{v}, \bar{u}]} = -\text{tr}_{[\bar{v}, \bar{u}]} = -\{\text{tr}_v, \text{tr}_u\}_{\text{SL}}.$$

3. Règle de Leibniz

Soit $\sigma \in \chi(\Gamma, \text{SL}(2, \mathbb{C}))$. En utilisant le représentant de v^{-1} qui a la même image que v mais parcourue en sens inverse, les points d'intersection entre uv et w sont les mêmes que ceux entre uv^{-1} et w . On peut également supposer que u, v et w n'ont pas de point d'intersection commun. On obtient

$$\begin{aligned} \{\text{tr}_u \text{tr}_v, \text{tr}_w\}_{\text{SL}}(\sigma) &= \{\text{tr}_{uv+uv^{-1}}, \text{tr}_w\}_{\text{SL}}(\sigma) \\ &= \text{tr}(\sigma([\overline{uv + uv^{-1}}, \bar{w}])) \\ &= \text{tr}(\sigma([\overline{uv}, \bar{w}] + [\overline{uv^{-1}}, \bar{w}])) \\ &= \text{tr} \left(\sum_{p_i \in uv \cap w} s_i \cdot \sigma(uv \cdot_{p_i} w - uv \cdot_{p_i} w^{-1}) \right) \\ &\quad + \text{tr} \left(\sum_{p_i \in uv^{-1} \cap w} r_i \cdot \sigma(uv^{-1} \cdot_{p_i} w - uv^{-1} \cdot_{p_i} w^{-1}) \right) \\ &= \sum_{p_i \in uv \cap w} s_i \cdot (\text{tr}(\sigma(uv \cdot_{p_i} w)) - \text{tr}(\sigma(uv \cdot_{p_i} w^{-1}))) \\ &\quad + \sum_{p_i \in uv^{-1} \cap w} r_i \cdot (\text{tr}(\sigma(uv^{-1} \cdot_{p_i} w)) - \text{tr}(\sigma(uv^{-1} \cdot_{p_i} w^{-1}))) \end{aligned}$$

Séparons les points d'intersection p_i de $uv \cap w$ en deux ensembles disjoints $\{p_{1j}\}$ et $\{p_{2k}\}$ contenant respectivement les points d'intersection entre u (et u^{-1}) et w et entre v (et v^{-1}) et w . Les signes s_i et r_i satisfont $s_i = r_i$ si $p_i \in u \cap w$ et $s_i = -r_i$ si $p_i \in v \cap w$ par le lemme 3.7. En notant s_{1j} et s_{2k} les signes aux points d'intersection p_{1j} et p_{2k} , on obtient donc,

$$\begin{aligned} \{\mathrm{tr}_u \mathrm{tr}_v, \mathrm{tr}_w\}_{\mathrm{SL}}(\sigma) &= \sum_{p_{1j} \in u \cap w} s_{1j} \cdot (\mathrm{tr}(\sigma(uv \cdot_{p_{1j}} w)) - \mathrm{tr}(\sigma(uv \cdot_{p_{1j}} w^{-1}))) \\ &\quad - \mathrm{tr}(\sigma(uv^{-1} \cdot_{p_{1j}} w)) + \mathrm{tr}(\sigma(uv^{-1} \cdot_{p_{1j}} w^{-1}))) \\ &+ \sum_{p_{2k} \in v \cap w} s_{2k} \cdot (\mathrm{tr}(\sigma(uv \cdot_{p_{2k}} w)) - \mathrm{tr}(\sigma(uv \cdot_{p_{2k}} w^{-1}))) \\ &\quad - \mathrm{tr}(\sigma(uv^{-1} \cdot_{p_{2k}} w)) + \mathrm{tr}(\sigma(uv^{-1} \cdot_{p_{2k}} w^{-1}))). \end{aligned}$$

Considérons maintenant la première somme. Par le lemme 6.10, on a que

$$\begin{aligned} &\sum_{p_{1j} \in u \cap w} s_{1j} \left(\mathrm{tr}(\sigma(uv \cdot_{p_{1j}} w)) - \mathrm{tr}(\sigma(uv \cdot_{p_{1j}} w^{-1})) \right. \\ &\quad \left. + \mathrm{tr}(\sigma(uv^{-1} \cdot_{p_{1j}} w)) - \mathrm{tr}(\sigma(uv^{-1} \cdot_{p_{1j}} w^{-1})) \right) \\ &= \mathrm{tr}_v(\sigma) \sum_{p_{1j} \in u \cap w} s_{1j} \left(\mathrm{tr}(\sigma(u \cdot_{p_{1j}} w)) - \mathrm{tr}(\sigma(u \cdot_{p_{1j}} w^{-1})) \right) \\ &= \mathrm{tr}_v \mathrm{tr}_{[\bar{u}, \bar{w}]}(\sigma) = \mathrm{tr}_v \{\mathrm{tr}_u, \mathrm{tr}_w\}_{\mathrm{SL}}(\sigma). \end{aligned}$$

De même, on montre que

$$\begin{aligned} &\sum_{p_{2k} \in v \cap w} s_{2k} \left(\mathrm{tr}(\sigma(uv \cdot_{p_{2k}} w)) - \mathrm{tr}(\sigma(uv \cdot_{p_{2k}} w^{-1})) \right. \\ &\quad \left. + \mathrm{tr}(\sigma(uv^{-1} \cdot_{p_{2k}} w)) - \mathrm{tr}(\sigma(uv^{-1} \cdot_{p_{2k}} w^{-1})) \right) \\ &= \mathrm{tr}_u \mathrm{tr}_{[\bar{v}, \bar{w}]}(\sigma) = \mathrm{tr}_u \{\mathrm{tr}_v, \mathrm{tr}_w\}_{\mathrm{SL}}(\sigma). \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien que $\{\mathrm{tr}_u \mathrm{tr}_v, \mathrm{tr}_w\}_{\mathrm{SL}} = \mathrm{tr}_u \{\mathrm{tr}_v, \mathrm{tr}_w\}_{\mathrm{SL}} + \mathrm{tr}_v \{\mathrm{tr}_u, \mathrm{tr}_w\}_{\mathrm{SL}}$.

4. Identité de Jacobi

$$\begin{aligned} &\{\mathrm{tr}_u, \{\mathrm{tr}_v, \mathrm{tr}_w\}_{\mathrm{SL}}\}_{\mathrm{SL}} + \{\mathrm{tr}_v, \{\mathrm{tr}_w, \mathrm{tr}_u\}_{\mathrm{SL}}\}_{\mathrm{SL}} + \{\mathrm{tr}_w, \{\mathrm{tr}_u, \mathrm{tr}_v\}_{\mathrm{SL}}\}_{\mathrm{SL}} \\ &= \{\mathrm{tr}_u, \mathrm{tr}_{[\bar{v}, \bar{w}]} \}_{\mathrm{SL}} + \{\mathrm{tr}_v, \mathrm{tr}_{[\bar{w}, \bar{u}]} \}_{\mathrm{SL}} + \{\mathrm{tr}_w, \mathrm{tr}_{[\bar{u}, \bar{v}]} \}_{\mathrm{SL}} \\ &= \mathrm{tr}_{[\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}]} + \mathrm{tr}_{[\bar{v}, \bar{w}, \bar{u}]} + \mathrm{tr}_{[\bar{w}, \bar{u}, \bar{v}]} \\ &= \mathrm{tr}_{[\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}] + [\bar{v}, \bar{w}, \bar{u}] + [\bar{w}, \bar{u}, \bar{v}]} \\ &= 0 \end{aligned}$$

car le crochet de Goldman non-orienté satisfait l'identité de Jacobi.

Ainsi, $\{\cdot, \cdot\}_{\mathrm{SL}}$ est bel et bien un crochet de Poisson. \square

Grâce à ce résultat, on peut montrer que cette nouvelle définition du crochet de Poisson pour $\mathbb{C}[\chi(F_2, \text{SL}(2, \mathbb{C}))]$ pour le tore à un trou est équivalente à celle donnée par la définition 6.2.

Théorème 6.11. *Soient $u, v \in F_2$. Alors, pour le tore à un trou, les deux crochets de Poisson*

$$\{\text{tr}_u, \text{tr}_v\} = \left| \nabla \text{tr}_u \quad \nabla \text{tr}_v \quad H(x, y, z) \right|,$$

où $H(x, y, z) = (2x - yz, 2y - xz, 2z - xy)^t$, et

$$\{\text{tr}_u, \text{tr}_v\}_{\text{SL}} = \text{tr}_{[\bar{u}, \bar{v}]}$$

sont égaux. On note ici que $x = \text{tr}_a, y = \text{tr}_b$ et $z = \text{tr}_{ab}$.

Démonstration. Comme x, y et z engendrent $\mathbb{C}[\chi(F_2, \text{SL}(2, \mathbb{C}))]$ (théorème 4.8), il suffit de montrer que les deux crochets $\{\cdot, \cdot\}$ et $\{\cdot, \cdot\}_{\text{SL}}$ prennent les mêmes valeurs sur les paires de générateurs $(x, y), (y, z)$ et (x, z) . En effet, si deux crochets de Poisson sont égaux sur leurs générateurs, alors ils sont identiquement égaux (grâce à la règle de Leibniz). On montre ici la vérification de l'égalité pour la paire (x, y) . Les calculs pour les deux autres couples sont laissés en exercices. D'une part,

$$\{x, y\} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2x - yz \\ 0 & 1 & 2y - xz \\ 0 & 0 & 2z - xy \end{vmatrix} = 2z - xy$$

et, d'autre part,

$$\{x, y\}_{\text{SL}} = \text{tr}_{[\bar{a}, \bar{b}]} = \text{tr}_{ab-b^{-1}a} = \text{tr}_{ab} - (\text{tr}_a \text{tr}_b - \text{tr}_{ab}) = 2z - xy.$$

Ainsi, $\{\cdot, \cdot\} = \{\cdot, \cdot\}_{\text{SL}}$ pour le tore à un trou. Ceci est équivalent à $\text{tr}_{[\bar{v}, \bar{w}]} = \{\text{tr}_v, \text{tr}_w\}$. \square

6.2 Crochet de Poisson sur $\mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*)]$

Dans le même ordre d'idées que dans la section 6.1, on veut démontrer le théorème suivant.

Théorème 6.12. *L'application $\{\cdot, \cdot\}_{\mathbb{C}^*} : \mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*)] \times \mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*)] \rightarrow \mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*)]$ définie par*

$$\{\text{tr}_u, \text{tr}_v\}_{\mathbb{C}^*} := \text{tr}_{[u, v]}$$

et étendue par linéarité est un crochet de Poisson.

Remarquons que puisque $\text{tr}(\eta(u)) = \eta(u)$ pour $\eta \in \chi(\Gamma, \mathbb{C}^*)$, la définition appliquée à η peut se réécrire comme $\{\text{tr}_u, \text{tr}_v\}_{\mathbb{C}^*}(\eta) = \eta([u, v])$.

Nous énonçons maintenant un lemme qui nous aidera à démontrer ce théorème.

Lemme 6.13. *Soit $\eta \in \chi(\Gamma, \mathbb{C}^*)$ et $u, v \in \Gamma$. Alors,*

$$\eta([u, v]) = \sum_{p_i \in u \cap v} s_i \cdot \eta(uv).$$

Démonstration.

D'abord, on remarque que $\eta(w_1)\eta(w_2) = \eta(w_2)\eta(w_1)$, $\forall w_1, w_2 \in \Gamma$ puisque $\eta(w_1), \eta(w_2) \in \mathbb{C}^*$. Ainsi, par le lemme 6.9, $\exists w_i \in \Gamma$ tel qu'on a

$$\eta(u \cdot_i v) = \eta(uw_i v w_i^{-1}) = \eta(u)\eta(w_i)\eta(v)\eta(w_i^{-1}) = \eta(u)\eta(v).$$

Par abus de notation, nous noterons maintenant \cdot_{p_i} par \cdot_i . Par conséquent, on obtient que

$$\eta([u, v]) = \eta\left(\sum_{p_i \in u \cap v} s_i \cdot (u \cdot_i v)\right) = \sum_{p_i \in u \cap v} s_i \cdot \eta(u \cdot_i v) = \sum_{p_i \in u \cap v} s_i \cdot \eta(uv). \quad \square$$

On peut maintenant démontrer le théorème 6.12.

Démonstration du théorème 6.12.

Montrons que $\{\cdot, \cdot\}_{\mathbb{C}^*}$ satisfait les quatre axiomes d'un crochet de Poisson.

1. Bilinéarité : On a cette propriété par définition de notre crochet.
2. Antisymétrie : Elle découle directement de l'antisymétrie du crochet de Goldman.
3. Règle de Leibniz : Soit $\eta \in \chi(\Gamma, \mathbb{C}^*)$. Notons d'abord que

$$\{\eta(u)\eta(v), \eta(w)\}_{\mathbb{C}^*} = \{\eta(uv), \eta(w)\}_{\mathbb{C}^*}$$

puisque η est un homomorphisme. On veut ainsi montrer que

$$\begin{aligned} \{\eta(u)\eta(v), \eta(w)\}_{\mathbb{C}^*} &= \eta(u)\{\eta(v), \eta(w)\}_{\mathbb{C}^*} + \eta(v)\{\eta(u), \eta(w)\}_{\mathbb{C}^*} \\ \iff \eta([uv, w]) &= \eta(u)\eta([v, w]) + \eta(v)\eta([u, w]) \end{aligned}$$

Or, par le lemme 6.13, cela est équivalent à montrer que

$$\begin{aligned} \sum_{p_i \in uv \cap w} s_i \cdot \eta(uvw) &= \eta(u) \sum_{q_j \in v \cap w} s_j \cdot \eta(vw) + \eta(v) \sum_{r_k \in u \cap w} s_k \cdot \eta(uw) \\ \iff \sum_{p_i \in uv \cap w} s_i \cdot \eta(uvw) &= \sum_{q_j \in v \cap w} s_j \cdot \eta(uvw) + \sum_{r_k \in u \cap w} s_k \cdot \eta(uvw) \end{aligned}$$

et cette dernière égalité est vraie car les points d'intersection p_i des courbes uv et w peuvent se séparer en deux ensembles disjoints $\{q_j | q_j \in v \cap w\}$ et $\{r_k | r_k \in u \cap w\}$ pour de bons représentants. De plus, chaque signe s_i correspond à un signe s_j ou un signe s_k selon l'ensemble auquel appartient p_i .

4. Identité de Jacobi :

$$\begin{aligned}
& \{\mathrm{tr}_u, \{\mathrm{tr}_v, \mathrm{tr}_w\}_{\mathbb{C}^*}\}_{\mathbb{C}^*} + \{\mathrm{tr}_v, \{\mathrm{tr}_w, \mathrm{tr}_u\}_{\mathbb{C}^*}\}_{\mathbb{C}^*} + \{\mathrm{tr}_w, \{\mathrm{tr}_u, \mathrm{tr}_v\}_{\mathbb{C}^*}\}_{\mathbb{C}^*} \\
&= \mathrm{tr}_{[u, [v, w]]} + \mathrm{tr}_{[v, [w, u]]} + \mathrm{tr}_{[w, [u, v]]} \\
&= \mathrm{tr}_{[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]]} \\
&= \mathrm{tr}_0, \text{ car le crochet de Goldman satisfait l'identité de Jacobi} \\
&= 0. \quad \square
\end{aligned}$$

Ainsi, on a défini un crochet de Poisson $\{\cdot, \cdot\}_{\mathbb{C}^*}$ sur l'algèbre de fonctions polynomiales $\mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*)]$, ce qui en fait une algèbre de Poisson.

6.3 Crochet de Poisson sur $\mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}))]$

On veut maintenant démontrer le théorème suivant :

Théorème 6.14. *L'application*

$$\{\cdot, \cdot\}_{\mathrm{GL}} : \mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}))] \times \mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}))] \rightarrow \mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}))]$$

définie par

$$\{\mathrm{tr}_u, \mathrm{tr}_v\}_{\mathrm{GL}} := \mathrm{tr}_{[u, v]}$$

est un crochet de Poisson.

Comme on a montré au théorème 5.2 que

$$(\mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*)] \otimes \mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))])^{\chi(\Gamma, \{-1, 1\})} \cong \mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}))],$$

commençons par montrer qu'on peut définir un crochet de Poisson sur l'espace $\mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*)] \otimes \mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))]^{\chi(\Gamma, \{-1, 1\})}$ dans le but d'étudier la relation entre le crochet de Poisson sur cet algèbre et l'application définie au théorème 6.14 sur l'algèbre $\mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}))]$.

6.3.1 Crochet de Poisson sur le produit tensoriel

Dans cette section, nous montrerons que $(\mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*)] \otimes \mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))])^{\chi(\Gamma, \{-1, 1\})}$ est une algèbre de Poisson. D'abord, considérons la proposition suivante :

Proposition 6.15. *Si A et B sont deux algèbres de Poisson, alors $A \otimes B$ l'est aussi, avec le crochet bilinéaire défini par :*

$$\{a_1 \otimes b_1, a_2 \otimes b_2\}_{A \otimes B} := \{a_1, a_2\}_A \otimes b_1 b_2 + a_1 a_2 \otimes \{b_1, b_2\}_B$$

sur les tenseurs simples.

Démonstration. Rappelons que le produit tensoriel de deux algèbres est également une algèbre (définition 4.3). Il reste donc à montrer que les quatre axiomes d'un crochet de Poisson sont satisfaits.

1. La bilinéarité suit de la définition.

2. Antisymétrie :

$$\begin{aligned}
\{a_1 \otimes b_1, a_2 \otimes b_2\}_{A \otimes B} &= \{a_1, a_2\}_A \otimes b_1 b_2 + a_1 a_2 \otimes \{b_1, b_2\}_B \\
&= -\{a_2, a_1\}_A \otimes b_1 b_2 + a_1 a_2 \otimes -\{b_2, b_1\}_B \\
&= -(\{a_2, a_1\}_A \otimes b_2 b_1 + a_2 a_1 \otimes \{b_2, b_1\}_B) \\
&= -\{a_2 \otimes b_2, a_1 \otimes b_1\}_{A \otimes B}
\end{aligned}$$

3. Règle de Leibniz :

$$\begin{aligned}
&\{(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2), a_3 \otimes b_3\}_{A \otimes B} \\
&= \{a_1 a_2 \otimes b_1 b_2, a_3 \otimes b_3\}_{A \otimes B} \\
&= \{a_1 a_2, a_3\}_A \otimes (b_1 b_2) b_3 + (a_1 a_2) a_3 \otimes \{b_1 b_2, b_3\}_B \\
&= (a_1 \{a_2, a_3\}_A + a_2 \{a_1, a_3\}_A) \otimes b_1 b_2 b_3 \\
&\quad + a_1 a_2 a_3 \otimes (b_1 \{b_2, b_3\}_B + b_2 \{b_1, b_3\}_B) \\
&= (a_1 \otimes b_1) (\{a_2, a_3\}_A \otimes b_2 b_3 + a_2 a_3 \otimes \{b_2, b_3\}_B) \\
&\quad + (a_2 \otimes b_2) (\{a_1, a_3\}_A \otimes b_1 b_3 + a_1 a_3 \otimes \{b_1, b_3\}_B) \\
&= \{a_1 \otimes b_1, a_3 \otimes b_3\}_{A \otimes B} (a_2 \otimes b_2) + (a_1 \otimes b_1) \{a_2 \otimes b_2, a_3 \otimes b_3\}_{A \otimes B}
\end{aligned}$$

4. Identité de Jacobi : Cette partie de la preuve est laissée au plaisir du lecteur.

Les quatre propriétés sont donc vérifiées et on a bien que $A \otimes B$ est une algèbre de Poisson. \square

Dans les sections 6.2 et 6.1, on a montré que $\mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*)]$ et $\mathbb{C}[\chi(\Gamma, \text{SL}(2, \mathbb{C}))]$ sont des algèbres de Poisson avec respectivement $\{\text{tr}_u, \text{tr}_v\}_{\mathbb{C}^*} = \text{tr}_{[u, v]}$ ainsi que $\{\text{tr}_u, \text{tr}_v\}_{\text{SL}} = \text{tr}_{[\bar{u}, \bar{v}]}$ pour crochets de Poisson. Ainsi, par la proposition 6.15, on peut faire de l'algèbre $O = \mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*)] \otimes \mathbb{C}[\chi(\Gamma, \text{SL}(2, \mathbb{C}))]$ une algèbre de Poisson en définissant sur celle-ci le crochet de Poisson suivant : $\{\cdot, \cdot\}_{\otimes} : O \times O \rightarrow O$ tel que

$$\{\text{tr}_u \otimes \text{tr}_v, \text{tr}_w \otimes \text{tr}_x\}_{\otimes} = \frac{1}{2} (\{\text{tr}_u, \text{tr}_w\}_{\mathbb{C}^*} \otimes \text{tr}_v \text{tr}_x + \text{tr}_u \text{tr}_w \otimes \{\text{tr}_v, \text{tr}_x\}_{\text{SL}}).$$

Le facteur $\frac{1}{2}$ ne change pas le fait que la définition ci-dessus reste un crochet de Poisson. Nous verrons plus tard l'importance de ce facteur.

Définition 6.16. Une application de Poisson entre deux algèbres de Poisson A et B est une application linéaire $T : A \rightarrow B$ qui préserve les crochets : $T\{a_1, a_2\} = \{T(a_1), T(a_2)\}$.

Rappelons que nous avons défini un isomorphisme

$$(\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*) \times \chi(\Gamma, \text{SL}(2, \mathbb{C}))) / \chi(\Gamma, \{-1, 1\}) \cong \chi(\Gamma, \text{GL}(2, \mathbb{C}))$$

grâce à l'application

$$\psi : (\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*) \times \chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))) / \chi(\Gamma, \{-1, 1\}) \rightarrow \chi(\Gamma, \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}))$$

définie par $\psi((\eta, \sigma)) = \eta\sigma$ (Section 5.2). Or, on sait que si $f : X \rightarrow Y$ est un isomorphisme, alors l'isomorphisme entre $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{C}[Y]$ est $f^* : \mathbb{C}[Y] \rightarrow \mathbb{C}[X]$ défini sur une fonction polynomiale $q \in \mathbb{C}[Y]$ par $f^*q(x) = q(f(x))$. Ainsi, on a l'isomorphisme

$$\psi^* : \mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}))] \rightarrow \mathbb{C}[(\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*) \times \chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))) / \chi(\Gamma, \{-1, 1\})]$$

tel que

$$(\psi^*q)(\eta, \sigma) \mapsto q(\psi(\eta, \sigma)) = q(\eta\sigma),$$

où $\eta \in \chi(\Gamma, \mathbb{C}^*)$ et $\sigma \in \chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$. Or, on sait par les propositions 4.5 et 5.5 que l'algèbre

$$(\mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*)] \otimes \mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))])^{\chi(\Gamma, \{-1, 1\})}$$

est isomorphe à l'algèbre

$$\mathbb{C}[(\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*) \times \chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))) / \chi(\Gamma, \{-1, 1\})].$$

En utilisant cet isomorphisme, un élément du produit tensoriel définit une fonction sur une paire d'homomorphismes par la formule

$$(f \otimes g)(\eta, \sigma) \mapsto f(\eta)g(\sigma).$$

Dorénavant, on identifiera implicitement ces deux espaces de fonctions en évaluant un élément du produit tensoriel sur une paire (η, ρ) sans mentionner l'isomorphisme. Nous voulons vérifier que cet isomorphisme envoie l'application $\{\cdot, \cdot\}_{\mathrm{GL}}$ au crochet de Poisson $\{\cdot, \cdot\}_{\otimes}$. Puisque l'algèbre $\mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}))]$ est engendrée par l'ensemble $\{\mathrm{tr}_u \mid u \in \Gamma\}$ (Théorème 4.10), on veut donc définir ψ^* sur ces fonctions. On a que

$$(\psi^* \mathrm{tr}_u)(\eta, \sigma) = \mathrm{tr}_u(\psi(\eta, \sigma)) = \mathrm{tr}_u(\eta\sigma) = \mathrm{tr}_u(\eta)\mathrm{tr}_u(\sigma).$$

Avec l'isomorphisme vers $(\mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*)] \otimes \mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))])^{\chi(\Gamma, \{-1, 1\})}$, le résultat est envoyé vers $(\mathrm{tr}_u \otimes \mathrm{tr}_u)(\eta, \sigma)$.

Définition 6.17. On définit l'isomorphisme

$$\psi^* : \mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}))] \rightarrow (\mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*)] \otimes \mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))])^{\chi(\Gamma, \{-1, 1\})}$$

par

$$(\psi^* \mathrm{tr}_u) = \mathrm{tr}_u \otimes \mathrm{tr}_u.$$

On écrira par abus de notation que

$$(\psi^* \mathrm{tr}_u)(\eta, \sigma) = (\mathrm{tr}_u \otimes \mathrm{tr}_u)(\eta, \sigma) = \eta(u)\mathrm{tr}_u(\sigma).$$

6.3.2 Crochet de Poisson $\{, \}_{\text{GL}}$

Nous sommes maintenant prêts à prouver que le crochet $\{, \}_{\text{GL}}$ défini par

$$\{\text{tr}_u, \text{tr}_v\}_{\text{GL}} := \text{tr}_{[u,v]}$$

est bien un crochet de Poisson. Pour ce faire, nous vérifierons que

$$\psi^* \{\text{tr}_u, \text{tr}_v\}_{\text{GL}} = \{\psi^* \text{tr}_u, \psi^* \text{tr}_v\}_{\otimes}.$$

Puisqu'on sait déjà que $\{, \}_{\otimes}$ satisfait la règle de Leibniz, on déduira que $\{, \}_{\text{GL}}$ aussi. Avant d'y arriver, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 6.18. *Soit $\sigma \in \chi(\Gamma, \text{SL}(2, \mathbb{C}))$ et $u, v \in \Gamma$. Alors,*

$$\text{tr}_{[u,v]+[u,v^{-1}]}(\sigma) = (2\text{tr}_{[u,v]} - \sum_{p_i \in u \cap v} s_i \cdot \text{tr}_u \text{tr}_v)(\sigma).$$

Démonstration.

Notons d'abord qu'on peut écrire l'identité $\text{tr}(U)\text{tr}(V) = \text{tr}(UV) + \text{tr}(UV^{-1})$ de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ comme

$$\text{tr}(U)\text{tr}(WVW^{-1}) = \text{tr}(UWVW^{-1}) + \text{tr}(UWV^{-1}W^{-1}),$$

où $W \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$, en raison de l'invariance de la trace par la conjugaison. Ainsi, en utilisant notamment le lemme 3.7, on a le calcul suivant :

$$\begin{aligned} & \text{tr}(\sigma([u,v])) + \text{tr}(\sigma([u,v^{-1}])) \\ &= \text{tr} \left(\sigma \left(\sum_{p_i \in u \cap v} s_i \cdot (u \cdot_i v) \right) \right) + \text{tr} \left(\sigma \left(\sum_{p_i \in u \cap v^{-1}} (-s_i) \cdot (u \cdot_i v^{-1}) \right) \right) \\ &= \text{tr} \left(\sigma \left(\sum_{p_i \in u \cap v} s_i \cdot (uw_i v w_i^{-1}) \right) \right) - \text{tr} \left(\sigma \left(\sum_{p_i \in u \cap v^{-1}} s_i \cdot (uw_i v^{-1} w_i^{-1}) \right) \right) \\ &= \sum_{p_i \in u \cap v} s_i \cdot (\text{tr}(\sigma(uw_i v w_i^{-1})) - \text{tr}(\sigma(uw_i v^{-1} w_i^{-1}))) \\ &= \sum_{p_i \in u \cap v} s_i \cdot (\text{tr}(\sigma(uw_i v w_i^{-1})) - (\text{tr}(\sigma(u))\text{tr}(\sigma(w_i v w_i^{-1})) - \text{tr}(\sigma(uw_i v w_i^{-1})))) \\ &= \sum_{p_i \in u \cap v} s_i \cdot (2\text{tr}(\sigma(uw_i v w_i^{-1})) - \text{tr}(\sigma(u))\text{tr}(\sigma(v))) \\ &= 2\text{tr}(\sigma([u,v])) - \sum_{p_i \in u \cap v} s_i \cdot \text{tr}(\sigma(u))\text{tr}(\sigma(v)). \quad \square \end{aligned}$$

Théorème 6.19. *L'application ψ^* satisfait*

$$\psi^* \{\text{tr}_u, \text{tr}_v\}_{\text{GL}} = \{\psi^* \text{tr}_u, \psi^* \text{tr}_v\}_{\otimes},$$

pour tout $u, v \in \Gamma$.

Démonstration. Soient $(\eta, \sigma) \in \chi(\Gamma, \mathbb{C}^*) \times \chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$. Alors,

$$\begin{aligned}
& \{\psi^* \mathrm{tr}_u, \psi^* \mathrm{tr}_v\}_{\otimes}(\eta, \sigma) \\
&= \{\mathrm{tr}_u \otimes \mathrm{tr}_u, \mathrm{tr}_v \otimes \mathrm{tr}_v\}_{\otimes}(\eta, \sigma) \\
&= \frac{1}{2}(\{\mathrm{tr}_u, \mathrm{tr}_v\}_{\mathbb{C}^*} \otimes \mathrm{tr}_u \mathrm{tr}_v + \mathrm{tr}_u \mathrm{tr}_v \otimes \{\mathrm{tr}_u, \mathrm{tr}_v\}_{\mathrm{SL}})(\eta, \sigma) \\
&= \frac{1}{2}(\mathrm{tr}_{[u,v]} \otimes \mathrm{tr}_u \mathrm{tr}_v + \mathrm{tr}_u \mathrm{tr}_v \otimes \mathrm{tr}_{[\bar{u}, \bar{v}]}) (\eta, \sigma) \\
&= \frac{1}{2}(\mathrm{tr}_{[u,v]} \otimes \mathrm{tr}_u \mathrm{tr}_v + \mathrm{tr}_u \mathrm{tr}_v \otimes \mathrm{tr}_{[u,v]+[u,v-1]})(\eta, \sigma), \text{ par le théorème 3.8,}
\end{aligned}$$

en notant à la dernière étape que $\mathrm{tr}_\gamma = \mathrm{tr}_{\gamma^{-1}}$ pour une fonction de trace de $\mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))]$. On a alors, par le lemme 6.18, que

$$\begin{aligned}
& \{\psi^* \mathrm{tr}_u, \psi^* \mathrm{tr}_v\}_{\otimes}(\eta, \sigma) \\
&= \frac{1}{2}(\mathrm{tr}_{[u,v]} \otimes \mathrm{tr}_u \mathrm{tr}_v + \mathrm{tr}_u \mathrm{tr}_v \otimes (2\mathrm{tr}_{[u,v]} - \sum_{p_i \in u \cap v} s_i \cdot \mathrm{tr}_u \mathrm{tr}_v))(\eta, \sigma).
\end{aligned}$$

En passant dans $\mathbb{C}[(\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*) \times \chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))) / \chi(\Gamma, \{-1, 1\})]$, on obtient

$$\begin{aligned}
& \{\psi^* \mathrm{tr}_u, \psi^* \mathrm{tr}_v\}_{\otimes}(\eta, \sigma) \\
&= \frac{1}{2}(\eta([u,v]) \mathrm{tr}_u(\sigma) \mathrm{tr}_v(\sigma) + \eta(uv)(2\mathrm{tr}_{[u,v]}(\sigma) - \sum_{p_i \in u \cap v} s_i \cdot \mathrm{tr}_u(\sigma) \mathrm{tr}_v(\sigma))) \\
&= \frac{1}{2}(\mathrm{tr}_u(\sigma) \mathrm{tr}_v(\sigma) \sum_{p_i \in u \cap v} s_i \cdot \eta(uv) + \eta(uv)(2\mathrm{tr}_{[u,v]}(\sigma) - \sum_{p_i \in u \cap v} s_i \cdot \mathrm{tr}_u(\sigma) \mathrm{tr}_v(\sigma))),
\end{aligned}$$

par le lemme 6.13

$$= \eta(uv) \mathrm{tr}_{[u,v]}(\sigma).$$

Ainsi, par la proposition 6.9, on a

$$\begin{aligned}
\{\psi^* \mathrm{tr}_u, \psi^* \mathrm{tr}_v\}_{\otimes}(\eta, \sigma) &= \eta(uw_i v w_i^{-1}) \left(\sum_{p_i \in u \cap v} s_i \cdot \mathrm{tr}(\sigma(uw_i v w_i^{-1})) \right) \\
&= \sum_{p_i \in u \cap v} s_i \cdot (\eta(uw_i v w_i^{-1}) \mathrm{tr}(\sigma(uw_i v w_i^{-1}))) \\
&= \sum_{p_i \in u \cap v} s_i \cdot \mathrm{tr}(\eta \sigma(uw_i v w_i^{-1})) \\
&= \mathrm{tr}(\eta \sigma([u,v])) \\
&= \psi^* \mathrm{tr}_{[u,v]}(\eta, \sigma)
\end{aligned}$$

□

Nous déduisons de ce théorème le corollaire qui suit :

Corollaire 6.20. *La sous-algèbre des invariants*

$$(\mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*)] \otimes \mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))])^{\chi(\Gamma, \{-1, 1\})}$$

est une sous-algèbre de Poisson de $\mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathbb{C}^)] \otimes \mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))]$.*

Démonstration. Grâce à l'isomorphisme du théorème 5.2 et au fait que les traces engendrent les algèbres de fonctions des variétés de caractères (théorème 4.10), on déduit que les fonctions de trace engendrent

$$(\mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*)] \otimes \mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))])^{\chi(\Gamma, \{-1, 1\})}.$$

De plus, la formule du théorème 6.19 démontre que le crochet de deux fonctions de trace s'écrit comme une combinaison linéaire de fonctions de trace, et est donc encore dans la sous-algèbre des invariants. \square

Finalement, on déduit que le crochet $\{\cdot, \cdot\}_{\mathrm{GL}}$ est un crochet de Poisson de la manière suivante : il est envoyé au crochet $\{\cdot, \cdot\}_{\otimes}$ par l'isomorphisme ψ^* , et ce dernier satisfait la règle de Leibniz. Ceci force $\{\cdot, \cdot\}_{\mathrm{GL}}$ à satisfaire la règle de Leibniz, qui était le seul axiome à vérifier.

Nous pouvons ainsi interpréter le théorème 6.19 comme disant que l'application ψ^* est un isomorphisme d'algèbres de Poisson.

Références

- [Bum98] Daniel BUMP : *Algebraic geometry*. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1998.
- [Cha04] Moira CHAS : Combinatorial lie bialgebras of curves on surfaces. *Topology*, 43(3):543–568, 2004.
- [Cha15] Moira CHAS : The Goldman bracket and the intersection of curves on surfaces. In *Geometry, groups and dynamics*, volume 639 de *Contemp. Math.*, pages 73–83. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.
- [CK10] Moira CHAS et Fabiana KRONGOLD : An algebraic characterization of simple closed curves on surfaces with boundary. *J. Topol. Anal.*, 2(3):395–417, 2010.
- [DCP17] Corrado DE CONCINI et Claudio PROCESI : *The invariant theory of matrices*, volume 69 de *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2017.
- [Dol03] Igor DOLGACHEV : *Lectures on invariant theory*, volume 296 de *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [FL12] Carlos FLORENTINO et Sean LAWTON : Singularities of free group character varieties. *Pacific J. Math.*, 260(1):149–179, 2012.
- [Gol86] William M. GOLDMAN : Invariant functions on Lie groups and Hamiltonian flows of surface group representations. *Invent. Math.*, 85(2):263–302, 1986.

- [Gol09] William M. GOLDMAN : Trace coordinates on Fricke spaces of some simple hyperbolic surfaces. *In Handbook of Teichmüller theory. Vol. II*, volume 13 de *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, pages 611–684. Eur. Math. Soc., Zürich, 2009.
- [Sha13] Igor R. SHAFAREVICH : *Basic algebraic geometry. 1*. Springer, Heidelberg, third édition, 2013. Varieties in projective space.
- [Tur91] Vladimir G. TURAEV : Skein quantization of Poisson algebras of loops on surfaces. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 24(6):635–704, 1991.

BENJAMIN OUIMETTE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
Courriel: benjamin.ouimette@usherbrooke.ca

CASSANDRA GUILLEMETTE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
Courriel: cassandra.guillemette@usherbrooke.ca

Introduction à la topologie différentielle par le biais de la théorie de Morse classique

Geneviève Soroka-Perras

Reçu le 2023-07-28 et accepté le 2024-02-26

RÉSUMÉ L’objectif de cet article est de présenter la théorie de Morse classique ainsi que les notions de topologie différentielle nécessaires à sa compréhension. Des exemples seront notamment présentés de même que des références vers des sujets connexes.

1 Introduction

La topologie est une branche des mathématiques étudiant, entre autres, les propriétés invariantes, par exemple la dimension, d’objets géométriques abstraits (espaces topologiques) sous un homéomorphisme (déformation continue et bijective). La topologie différentielle est un cas particulier où les espaces topologiques sont des variétés lisses, par exemple les sphères munies d’une correspondance avec un espace euclidien, soumises à un difféomorphisme (homéomorphisme différentiable). La topologie différentielle est reliée de près à la géométrie différentielle, laquelle étudie les propriétés géométriques des variétés lisses, par exemple les distances. Ces théories se complètent pour former une théorie géométrique des variétés lisses, incluant notamment l’étude des comportements des flots sur les variétés lisses, nommée théorie des systèmes dynamiques lisses et détaillée dans [BDM17].

La théorie sous-jacente de topologie différentielle présentée dans cet article, la théorie de Morse classique, se développe durant la première moitié du vingtième siècle, principalement par le mathématicien Harold Calvin Marston Morse [Bot80]). Elle étudie la topologie d’une variété lisse en analysant une fonction lisse (dite de Morse) définie sur celle-ci. Une des principales applications de la théorie de Morse est la décomposition en anses d’une variété. D’autres applications, par exemple en robotique, sont détaillées au chapitre 3 de [N⁺11]. De plus, vers la fin du vingtième siècle, le mathématicien Robin Forman développe un analogue combinatoire de la théorie de Morse classique, nommée la théorie de Morse discrète. Celle-ci étudie la topologie de complexes simpliciaux, des objets

J’aimerais remercier le groupe de recherches SAG pour m’avoir permis de suivre un stage de recherches, et particulièrement Tomasz Kaczynski pour m’avoir supervisée, encadrée et financée.

constitués de sommets, d'arêtes et de triangles, plutôt que de variétés lisses ¹. La modélisation de surfaces est un exemple d'applications de la théorie de Morse discrète, tel que mentionné dans [LLT04].

Le présent article vise à introduire la topologie différentielle par le biais de la théorie de Morse classique, en quatre étapes. D'abord, à la section 2, nous présentons quelques notions topologiques préliminaires ([NI14]), puis à la section 3, nous définissons une variété lisse ainsi qu'une fonction lisse définie sur celle-ci ([Lee13]). Ensuite nous présentons les grandes lignes de la théorie de Morse à la section 4, avant de terminer, à la section 5, en présentant la décomposition en anses d'une variété lisse ([Mat02]).

2 Rappels sur les espaces topologiques

Tout d'abord, rappelons quelques définitions élémentaires de topologie afin de comprendre ce que signifie « l'étude des propriétés invariantes d'espaces topologiques sous un homéomorphisme ». Les définitions sont tirées de [NI14].

Définition 2.1. (X, τ) est un espace topologique si X , un ensemble, et τ , une collection de sous-ensembles de X appelés ouverts, satisfont :

1. $\emptyset, X \in \tau$
2. $U_i \in \tau \forall i \implies \bigcup_i U_i \in \tau$
3. $U_1, U_2 \in \tau \implies U_1 \cap U_2 \in \tau$

Définition 2.2. Soit un espace topologique (X, τ) et un élément $x \in X$. Toute partie de X contenant un ouvert contenant x est un voisinage de x . L'ensemble des voisinages de $x \in X$ est noté $\nu(x)$.

Définition 2.3. Une base pour la topologie de (X, τ) , notée \mathbb{B} , est une famille d'ouverts, où tout ouvert de X s'écrit comme réunion d'intersections finies d'éléments de \mathbb{B} .

Définition 2.4. Une fonction $f : X \rightarrow X'$ est continue sur X si pour tout $a \in X$, nous avons que $V' \in \nu(f(a))$ implique que $f^{-1}(V') \in \nu(a)$.

Remarque 2.5. Si $f : X \rightarrow X'$ est continue et $F \subset X'$ est fermé, alors $X \setminus f^{-1}(F) = f^{-1}(X' \setminus F)$ est ouvert, donc $f^{-1}(F)$ est fermé.

Définition 2.6. Un homéomorphisme est une bijection $f : X \rightarrow X'$ telle que f et f^{-1} soient continues. S'il existe une telle application entre (X, τ) et (X', τ') , ces espaces sont homéomorphes.

Définition 2.7. Un invariant topologique est une propriété d'un espace topologique qui ne change pas sous l'application d'un homéomorphisme.

¹Voir l'article CaMUS, volume 7, de D. Desjardins Côté sur le sujet.

Définissons à présent deux des principales propriétés topologiques, soit le fait d'être séparé ainsi que la compacité.

Plusieurs axiomes de séparation existent, mais le plus fréquemment mentionné est la séparation τ_2 (dite de Hausdorff).

Définition 2.8. Un espace topologique (X, τ) est de Hausdorff si $\forall x, y \in X$ distincts, $\exists V \in \nu(x)$ et $\exists W \in \nu(y)$ tels que $V \cap W = \emptyset$.

Enfin, la compacité, rencontrée en analyse réelle sous le théorème de Heine-Borel-Lebesgue, est définie plus généralement comme suit :

Définition 2.9. Un espace topologique est compact s'il est de Hausdorff et si, de toute famille d'ouverts dont l'union est égale à X (recouvrement ouvert), on peut en extraire un sous-recouvrement fini.

Théorème 2.10. Soit X et Y espaces topologiques de Hausdorff. Si X est compact et s'il existe une fonction continue $f : X \rightarrow Y$, alors $f(X)$ est aussi compact dans Y .

Consolidons cette section en présentant un espace topologique particulier, le quotient. Les définitions qui suivent proviennent de l'appendice A de [Lee13].

Définition 2.11. Soit X , un espace topologique, Y , un ensemble et $\pi : X \rightarrow Y$, une application surjective et continue. La topologie du quotient sur Y déterminée par π est définie en déclarant $U \subset Y$ comme étant ouvert si et seulement si $\pi^{-1}(U) \subset X$ est ouvert. Dans ce cas, $\pi : X \rightarrow Y$ est dite application quotient.

Définition 2.12. Un sous-ensemble $U \subset X$ est dit saturé selon $\pi : X \rightarrow Y$ si $U = \pi^{-1}(\pi(U))$, c'est-à-dire s'il est la préimage entière de son image par π .

Théorème 2.13. Soit $\pi : X \rightarrow Y$ une application quotient et B un espace topologique. Alors :

1. $F : Y \rightarrow B$ est continue $\iff F \circ \pi : X \rightarrow B$ est continue.
2. La topologie du quotient est la seule topologie dans laquelle le point précédent est vrai.
3. $K \subset Y$ est fermé $\iff \pi^{-1}(K) \subset X$ est fermé.
4. Si π est injective, alors il s'agit d'un homéomorphisme.
5. Si $U \subset X$ est soit ouvert ou fermé et saturé, alors la restriction $\pi|_U : U \rightarrow \pi(U)$ est une application quotient.
6. Toute composition de π avec une application quotient est une application quotient.

3 Variété lisse

Les définitions de la section précédente nous permettent désormais de définir l'objet mathématique sur lequel se base notre étude, la variété lisse. La théorie de cette section s'inspire des deux premiers chapitres de [Lee13]. Nous procédons en deux temps : l'objet topologique, puis sa structure lisse.

3.1 Variété topologique

Définition 3.1. M est une variété de dimension m (ou m -variété) si :

1. M est un espace topologique
2. M est de Hausdorff
3. Il existe une base dénombrable pour la topologie de M
4. Tout point $p \in M$ a un voisinage homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^m

Remarque 3.2. Le point 4 donne l'existence, pour tout $p \in M$, d'un homéomorphisme $\phi : U \rightarrow U'$, où $U \subset M$ et $U' \subset \mathbb{R}^m$ sont des ouverts et $p \in U$.

Une m -variété topologique avec bords se définit similairement comme suit :

Définition 3.3. Une m -variété topologique avec bords est une m -variété topologique où tout point $p \in M$ a un voisinage homéomorphe ou bien à un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^m , ou bien à un sous-ensemble ouvert de \mathbb{H}^m , où \mathbb{H}^m est le demi-espace supérieur fermé défini par :

$$\mathbb{H}^m = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_m \geq 0\}.$$

À partir de la remarque 3.2, nous pouvons définir une *carte locale* (coordinate chart, [Lee13]) pour une m -variété M .

Définition 3.4. Une carte locale sur M est une paire (U, ϕ) , où U est un ouvert de M et $\phi : U \rightarrow U'$ est un homéomorphisme entre U et $U' = \phi(U) \subset \mathbb{R}^m$ (voir figure 3.1). L'ensemble U est un *domaine local* (coordinate domain, [Lee13]) et l'application ϕ est une application de coordonnées (coordinate map, [Lee13]).

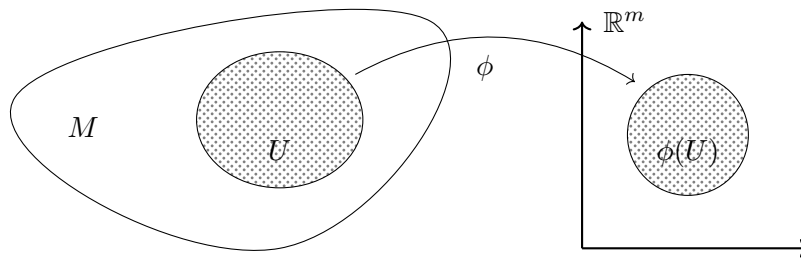


FIGURE 1 : Carte locale

Les coordonnées locales de p sur U sont $\phi(p) = (x_1(p), \dots, x_m(p))$. Si $\phi(p) = 0$, la carte locale est centrée en p . Sinon, il est possible d'obtenir une nouvelle carte locale centrée en p en y soustrayant le vecteur constant $\phi(p)$.

3.2 Structure lisse

La théorie de Morse porte sur l'analyse d'une fonction lisse sur une variété lisse. Afin de rendre possible le calcul différentiel sur une variété, celle-ci doit être munie d'une structure additionnelle. Le but de cette sous-section est de définir cette structure. Pour ce faire, plusieurs définitions seront présentées pour une m -variété M et une application de coordonnées $\phi : U \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^m$.

Définition 3.5. Soit des ouverts $U \subset \mathbb{R}^m$ et $V \subset \mathbb{R}^n$. Une application $F : U \rightarrow V$ est lisse si chacune de ses fonctions composantes a des dérivées partielles continues peu importe l'ordre. Si de plus F est bijective et F^{-1} est lisse, alors F est un difféomorphisme (cas particulier d'homéomorphisme).

Définition 3.6. Une fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ est lisse en un point $p \in M$ s'il existe une carte locale (U, ϕ) autour de $p \in M$ telle que $f \circ \phi^{-1}$ soit lisse. La fonction f est lisse sur M si elle est lisse en tout point $\forall p \in M$.

Définition 3.7. Si (U, ϕ) et (V, ψ) sont deux cartes locales pour une m -variété M telles que $U \cap V \neq \emptyset$, la composition $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ est dite *application de transition* de ϕ à ψ (*transition map*, [Lee13]).

Remarque 3.8. Une application de transition est un homéomorphisme, puisqu'il s'agit d'une composition d'homéomorphismes (remarque 3.2).

Définition 3.9. Deux cartes locales (U, ϕ) et (V, ψ) sont dites *compatibles* (smoothly compatible, [Lee13]) si ou bien $U \cap V = \emptyset$, ou bien l'application de transition $\psi \circ \phi^{-1}$ est un difféomorphisme.

Définition 3.10. Un atlas lisse sur M , noté \mathcal{A} , est une collection de cartes locales (U_i, ϕ_i) dont les domaines U_i recouvrent M et dans laquelle n'importe quelles deux cartes locales sont compatibles, puis il est maximal s'il ne peut être contenu dans un plus grand atlas.

Définition 3.11. Une variété lisse est une paire (M, \mathcal{A}) , où M est une variété topologique et \mathcal{A} est un atlas maximal lisse sur M .

Voyons quelques exemples.

Exemple 3.12. Les espaces euclidiens \mathbb{R}^m sont les variétés lisses les plus simples. Elles admettent $(\mathbb{R}^m, Id_{\mathbb{R}^m})$ comme seule carte locale.

Exemple 3.13. Le graphe d'une fonction lisse $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ défini par $\Gamma(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \mid x \in U, y = f(x)\}$ avec la topologie du sous-espace de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$. Soit $\pi_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$, la projection (continue) sur le premier terme, et soit $\phi : \Gamma(f) \rightarrow U$ telle que $\phi(x, y) = x$, la restriction de π_1 à $\Gamma(f)$. ϕ est une application continue, car il s'agit de la restriction d'une application continue π_1 . De plus, ϕ est un homéomorphisme, puisque son inverse s'écrit explicitement par $\phi^{-1}(x) = (x, f(x))$. Ainsi, $\Gamma(f)$ est une variété topologique de dimension n ainsi qu'une variété lisse avec comme seule carte locale $(\Gamma(f), \phi)$.

Ensuite, les m -sphères sont d'autres exemples communs de variétés.

Exemple 3.14. Toute n -sphère unitaire \mathbb{S}^n peut être munie de la topologie du sous-espace de \mathbb{R}^{n+1} . Pour qu'elle soit une variété topologique il ne reste qu'à définir un ensemble de cartes locales. La structure standard consiste d'abord à prendre $2(n+1)$ cartes locales dont les voisinages sont chaque côté de chaque axe, c'est-à-dire $U_i^+ = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i > 0\}$ et $U_i^- = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i < 0\}$. Ensuite, soit $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(u) = \sqrt{1 - |u|^2}$ de sorte que chaque $U_i^+ \cap \mathbb{S}^n$ soit le graphe de $x_i = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})$ et similairement, chaque $U_i^- \cap \mathbb{S}^n$ soit celui de $x_i = -f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})$. Ainsi, chaque sous-ensemble $U_i^\pm \cap \mathbb{S}^n$ est localement euclidien de dimension n grâce aux homéomorphismes (de graphe, comme dans l'exemple 3.13) $\phi_i^\pm : U_i^\pm \cap \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$ donnés par $\phi_i^\pm(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})$. En d'autres mots, chaque point $p \in \mathbb{S}^n$ est dans le domaine d'au moins une carte locale, faisant de \mathbb{S}^n une variété topologique.

Sa structure lisse nécessite toutefois des détails additionnels. Soit (U_i^\pm, ϕ_i^\pm) les cartes locales (de graphes) définies plus haut. Pour n'importe quels indices distincts $i < j$, l'application de transition se calcule explicitement :

$\phi_i^\pm \circ (\phi_j^\pm)^{-1}(u_1, \dots, u_n) = (u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, \pm \sqrt{1 - |u|^2_j}, \dots, u_n)$. L'indice j signifie que le terme $\pm \sqrt{1 - |u|^2}$ est à la j^e position. Lorsque $i = j$, $\phi_i^\pm \circ (\phi_i^\pm)^{-1} = Id_{\mathbb{B}^n}$. Ainsi, la collection $\{(U_i^\pm, \phi_i^\pm)\}$ de cartes locales est un atlas lisse et donc définit une structure lisse pour \mathbb{S}^n , faisant de celle-ci une variété lisse de dimension n .

Voici d'ailleurs plus explicitement un exemple de structure lisse pour la 2-sphère.

Exemple 3.15. Considérons la 2-sphère $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, une 2-variété dont la structure lisse standard se définit par six cartes locales dont les voisinages sont :

- $U_x^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0\}$
- $U_x^- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x < 0\}$
- $U_y^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y > 0\}$
- $U_y^- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y < 0\}$
- $U_z^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$
- $U_z^- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z < 0\}$

En particulier, considérons les cartes locales (U_z^\pm, ϕ_z^\pm) , où $\phi_z^+(x, y, z) = (x, y)$ et $\phi_z^-(x, y, z) = (x, y)$. Alors $\phi_z^{+^{-1}}(x, y) = (x, y, f(x, y))$ et $\phi_z^{-^{-1}}(x, y) = (x, y, -f(x, y))$, avec $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Cet exemple sera détaillé davantage tout au long de l'article, jusqu'à la dernière section lorsque nous discuterons de sa décomposition en anses.

À cet effet, présentons similairement la structure lisse des espaces projectifs réels $\mathbb{R}P^m$.

Exemple 3.16. $\mathbb{R}P^m$ est l'ensemble de toutes les droites passant par l'origine dans \mathbb{R}^{m+1} avec la topologie du quotient déterminée par la projection naturelle

$\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{RP}^m$ qui envoie chaque $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ au sous-espace engendré par x , noté $[x] = \pi(x) \in \mathbb{RP}^m$.

Soit $\tilde{U}_i \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, l'ensemble où $x_i \neq 0$, soit $U_i = \pi(\tilde{U}_i) \subset \mathbb{RP}^m$, un ouvert par le théorème 2.13 (car \tilde{U}_i est un ouvert saturé), soit $\pi|_{\tilde{U}_i} : \tilde{U}_i \rightarrow U_i$, une application quotient et soit $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ donnée par $\phi_i([x_1, \dots, x_{n+1}]) = (\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i})$. L'application ϕ_i est bien définie, car sa valeur reste inchangée lorsque x est multiplié par un scalaire non nul, puis par le théorème 2.13, ϕ_i est continue, puisque $\phi_i \circ \pi$ l'est.

De plus, ϕ_i est un homéomorphisme, puisque son inverse est continu et s'exprime explicitement par $\phi_i^{-1}(u_1, \dots, u_n) = [u_1, \dots, u_{i-1}, 1, u_i, \dots, u_n]$. Puisque les ouverts U_i pour $i = 1, \dots, n+1$ recouvrent \mathbb{RP}^m , celui-ci est localement euclidien. Sans détailler davantage, \mathbb{RP}^m est également de Hausdorff et satisfait le second axiome de dénombrabilité, donc est une variété topologique. Enfin, \mathbb{RP}^m est également une variété lisse, puisque la collection des cartes locales $\{(U_i, \phi_i)\}$ forme un atlas lisse. En effet, si $i > j$, l'application de transition est $\phi_j \circ \phi_i^{-1}(u_1, \dots, u_n) = (\frac{u_1}{u_j}, \dots, \frac{u_{j-1}}{u_j}, \frac{u_{j+1}}{u_j}, \dots, \frac{u_{i-1}}{u_j}, \frac{1}{u_j}, \frac{u_i}{u_j}, \dots, \frac{u_n}{u_j})$, soit un difféomorphisme de $\phi_i(U_i \cap U_j)$ à $\phi_j(U_i \cap U_j)$.

Plusieurs autres exemples de variétés et de structures lisses sont présentés à la fin du chapitre 1 de [Lee13].

Enfin, plus généralement, il existe une structure lisse pour les variétés de dimensions deux et trois, dont les détails se trouvent respectivement sous le théorème A de [Hat22], puis dans [Hat04]. Il est par conséquent difficile de visualiser une variété sur laquelle il n'existe pas de structure lisse, soit le sujet discuté dans [Ker60].

4 Théorie de Morse classique

Cette section introduit le sujet d'intérêt pour une m -variété lisse compacte M en trois étapes. D'abord nous décrivons la fonction lisse (de Morse) que nous voulons analyser en lui donnant une forme standard. Ensuite, nous montrons son existence, et enfin nous décrivons un champ vectoriel lui correspondant. Les deux dernières sections de cet article sont fortement inspirées de [Mat02], puis certaines explications du chapitre 4 sont inspirées de [Knu15].

4.1 Fonction de Morse

Rappelons d'abord ce qu'est un point critique et ce que signifie qu'il soit dégénéré, puis définissons une fonction de Morse.

Définition 4.1. Un point $p \in M$ est critique si $\frac{\partial f(p)}{\partial x_i} = 0 \forall i$, où (x_1, \dots, x_n) est le système de coordonnées locales autour de p . Si de plus $\det(H_f(p)) \neq 0$, alors p_0 est non dégénéré, où $H_f(p)$ est la matrice hessienne de f en p :

$$H_f(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}(p) \end{pmatrix}$$

Définition 4.2. Une fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ est de Morse si tous ses points critiques sont non dégénérés.

La fonction hauteur est fréquemment utilisée comme fonction de Morse. Voici un exemple de telle fonction ainsi que ses points critiques sur la sphère S^2 abordée à l'exemple 3.15.

Exemple 4.3. Soit la fonction hauteur $h : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x, y, z) = z$. Sa représentation en coordonnées sur la partie supérieure de S^2 (c-à-d le voisinage U_z^+) est $h \circ \phi_z^{+^{-1}}(x, y) = h(x, y, f(x, y)) = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Ses points critiques se trouvent lorsque le gradient de $h \circ \phi_z^{+^{-1}}$ s'annule, c'est-à-dire lorsque $\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}(-x, -y) = (0, 0)$, ce qui n'est vrai qu'en $(x, y) = (0, 0)$. Ainsi, sur S^2 , $\phi_z^{+^{-1}}(0, 0) = (0, 0, 1) = p_1$ est un point critique correspondant à la valeur critique $h(p_1) = c_1 = 1$. De plus, $H_f = (1 - x^2 - y^2)^{-3/2} \begin{pmatrix} y^2 - 1 & -xy \\ -xy & x^2 - 1 \end{pmatrix} \implies \det(H_f) = (1 - x^2 - y^2)^{-2} \neq 0$ en p_1 . Ainsi, p_1 est non dégénéré. De façon similaire, sur la partie inférieure de S^2 (c-à-d le voisinage U_z^-), nous trouvons que $p_0 = (0, 0, -1)$ est un point critique non dégénéré de h avec valeur critique $c_0 = h(p_0) = -1$. Nous pouvons enfin vérifier que h n'a pas d'autre point critique sur S^2 (en investiguant sa représentation sur U_x^\pm et U_y^\pm), faisant de h une fonction de Morse.

Poursuivons comme dans les exemples 3.15 et 4.3 avec la représentation de h autour de p_1 et p_0 comme étant $f(x, y)$ et $-f(x, y)$ respectivement.

Tel que motivé au premier chapitre de [Knu15], nous voyons que la représentation en coordonnées de h autour de chaque point critique motive l'existence d'une forme standard.

Exemple 4.4. Avec le développement en série de Taylor sur \mathbb{R}^2 , la représentation de h autour de p_1 est

$$\begin{aligned} f(x, y) &\approx f(0, 1) + \nabla f(0, 0)(x, y)^t + 1/2(x, y) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} (x, y)^t + \dots \\ &= 1 - 1/2(x^2 + y^2) + p(x, y) \end{aligned}$$

Comme le polynôme $p(x, y)$ est d'ordre ≥ 3 en x et y , pour des polynômes $\lambda_1(x, y)$ et $\lambda_2(x, y)$, nous pouvons récrire $f(x, y) = 1 - x^2\lambda_1(x, y) - y^2\lambda_2(x, y)$ autour de p_1 . Ainsi, en posant $u = x\sqrt{\lambda_1(x, y)}$ et $y = y\sqrt{\lambda_2(x, y)}$, la représentation de h pour une certaine carte locale autour de p_1 est $\tilde{f}(u, v) = h(p_1) - u^2 - v^2$. Similairement, autour de p_0 , $\tilde{f}(u, v) = h(p_0) + u^2 + v^2$.

Théorème 4.5. (Lemme de Morse)

Si $p_0 = (0, \dots, 0)$ est un point critique non dégénéré d'une fonction de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, alors il existe un système de coordonnées locales (X_1, \dots, X_m) autour de p_0 tel que la représentation de f dans ce système de coordonnées ait la forme standard suivante

$$f = -X_1^2 - X_2^2 - \dots - X_\lambda^2 + X_{\lambda+1}^2 + \dots + X_m^2 + f(p_0) \quad (1)$$

où λ est le nombre d'éléments négatifs sur la diagonale de $H_f(p_0)$ après diagonalisation, dit l'indice de p_0 .

Remarque 4.6. Avec la notation de la section précédente, un énoncé alternatif du lemme de Morse est le suivant. En tout point critique p d'une fonction de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, il existe une carte locale (U, ϕ) telle que la représentation de f dans U soit $f \circ \phi^{-1}(x_1, \dots, x_m) = f(p) - \sum_{i=1}^\lambda x_i^2 + \sum_{i=\lambda+1}^m x_i^2$.

Avant de présenter la preuve du théorème 4.5, nous avons besoin du lemme suivant, dont la preuve est une application du théorème fondamental de calcul et de la règle de dérivation en chaîne, présentée sous le lemme 2.1 dans [Mil63].

Lemme 4.7. Si une fonction $f(x_1, \dots, x_m)$ est définie autour de $(0, \dots, 0)$ avec $f(0, \dots, 0) = (0, \dots, 0)$, alors il existe m fonctions g_1, \dots, g_m telles que :

1. $f(x_1, \dots, x_m) = x_1 g_1(x_1, \dots, x_m) + \dots + x_m g_m(x_1, \dots, x_m)$
2. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(0, \dots, 0) = g_i(0, \dots, 0) \forall i = 1, \dots, m$

Montrons à présent le théorème 4.5.

Démonstration. Soit (x_1, \dots, x_m) , le système de coordonnées locales au point critique $p_0 = (0, \dots, 0)$. Nous pouvons supposer que $f(p_0) = 0$ en remplaçant f par $f - f(p_0)$.

Par le lemme 4.7, autour d'un voisinage de p_0 , nous avons m fonctions lisses $g_1(x_1, \dots, x_m), \dots, g_m(x_1, \dots, x_m)$ telles que :

$$f(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^m x_i g_i(x_1, \dots, x_m) \quad (2)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0) = g_i(p_0) \quad (3)$$

Les deux côtés de l'équation 3 sont nuls étant donné la criticalité de p_0 . En appliquant le lemme 4.7 à $g_i(x_1, \dots, x_m)$, nous obtenons m autres fonctions lisses $h_{i1}(x_1, \dots, x_m), \dots, h_{im}(x_1, \dots, x_m)$ telles que :

$$g_i(x_1, \dots, x_m) = \sum_{j=1}^m x_j h_{ij}(x_1, \dots, x_m) \quad (4)$$

dans un voisinage de p_0 .

En insérant cette équation dans l'équation 2, nous obtenons :

$$f(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i,j=1}^m x_i x_j h_{ij}(x_1, \dots, x_m) \quad (5)$$

Enfin, en posant $H_{ij} = (h_{ij} + h_{ji})/2$, nous obtenons :

$$f(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i,j=1}^m x_i x_j H_{ij}(x_1, \dots, x_m) \quad (6)$$

et

$$H_{ij}(x_1, \dots, x_m) = H_{ji}(x_1, \dots, x_m) \quad (7)$$

L'idée de la preuve est de changer la représentation de f dans l'équation 6 pour une représentation de la forme standard de l'équation 1 en procédant par induction sur le nombre de termes.

Calculons désormais les dérivées partielles de second ordre de f (selon l'équation 6) évaluées à l'origine, comme suit :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p_0) = 2H_{ij}(p_0) \quad (8)$$

Puisque le point critique p_0 est non dégénéré ($\det H_{ij}(p_0) \neq 0$), nous pouvons en tout temps supposer, à l'aide d'un changement de coordonnées approprié, que :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p_0) \neq 0 \quad (9)$$

En effet, voyons ceci dans un cas où les coordonnées sont (x, y) , où $p_0 = (0, 0)$. Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0) \neq 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_0) = 0$, en interchangeant les axes, nous obtenons la validité de 9. Si cette fois $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_0) = 0$, la matrice hessienne de f en $p_0 = (0, 0)$ dans les coordonnées (x, y) , où $a \neq 0$, a l'allure suivante :

$$H_f(p_0) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

Soit (X, Y) , un nouveau système de coordonnées donné par $x = X - Y$ et $y = X + Y$ et soit \mathcal{H}_f la matrice hessienne de f dans ce système de coordonnées. Alors \mathcal{H}_f a la forme suivante :

$$\mathcal{H}_f(p_0) = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & -2a \end{pmatrix}$$

La validité de 9 s'ensuit et se généralise pour tout système de coordonnées.

Ainsi, par l'équation 8, $H_{11} \neq 0$ et comme H_{11} est continue, elle ne s'annule pas dans un voisinage de p_0 .

Soit (X_1, x_2, \dots, x_m) , un nouveau système de coordonnées locales, où :

$$X_1 = \sqrt{|H_{11}|} \left(x_1 + \sum_{i=2}^m x_i \frac{H_{1i}}{H_{11}} \right) \quad (10)$$

Nous pouvons montrer que le déterminant du Jacobien de la transformation de (X_1, x_2, \dots, x_m) à (x_1, x_2, \dots, x_m) évalué en p_0 est non nul, et donc nous pouvons effectivement prendre (X_1, x_2, \dots, x_m) comme système de coordonnées locales.

Finalement, en évaluant le carré de X_1 et en le comparant à l'équation 6, nous avons :

$$f = \begin{cases} X_1^2 + \sum_{i,j=2}^m x_i x_j H_{ij} - (\sum_{i=2}^m x_i H_{1i})^2 / H_{11}, & H_{11} > 0 \\ -X_1^2 + \sum_{i,j=2}^m x_i x_j H_{ij} - (\sum_{i=2}^m x_i H_{1i})^2 / H_{11}, & H_{11} < 0. \end{cases} \quad (11)$$

Ainsi, nous observons dans 11 que les termes à partir du second sont indépendants de X_1 , et donc en procédant similairement avec X_2 jusqu'à X_m , nous pouvons alors montrer que f peut être représentée comme dans l'équation 1, ce qui achève la preuve. \square

Concluons cette sous-section avec deux corollaires importants du lemme 4.5.

Corollaire 4.8. *Les points critiques d'une fonction de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ sont tous isolés les uns des autres.*

Démonstration. Avec la notation de la remarque 4.6 sous le lemme de Morse (lemme 4.5), nous voyons que la i -ième dérivée partielle de $f \circ \phi^{-1}$ est $\pm 2x_i$, et donc $0 \in \phi(U)$ est le seul point pour lequel les dérivées partielles de $f \circ \phi^{-1}$ s'annulent. Ainsi, le seul point critique de f dans U est $p = \phi^{-1}(0)$. \square

Corollaire 4.9. *Une fonction de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ sur une variété compacte M admet un nombre fini de points critiques.*

Démonstration. Par le corollaire 4.8, tous les points critiques de f sont isolés. Comme l'ensemble des points critiques de f est fermé dans M (tel qu'expliqué à la remarque 2.5), il existe un recouvrement ouvert de M , tel que chaque élément de ce recouvrement contienne au plus un point critique de f . Puisque M est compacte, par la définition 2.9, nous pouvons en extraire un sous-recouvrement fini, d'où le nombre de points critiques est fini. \square

4.2 Existence d'une fonction de Morse

Si une fonction de Morse existe, nous connaissons une forme standard pour celle-ci. Mais sommes-nous certains de son existence ? Oui, nous le sommes. Le but de cette sous-section est de montrer ceci en cherchant une fonction qui soit « proche » d'une fonction de Morse. Définissons d'abord ce que signifie que $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ soient « proches », ou alternativement, que f soit une (C^2, ϵ) -approximation de g .

Soit un ouvert $U \subset M$ sur lequel est défini un système de coordonnées (x_1, \dots, x_m) (U est un voisinage en coordonnées tel que défini à la section précédente). Soit $K \subset U$ un ensemble compact et $\epsilon > 0$. Alors f est une (C^2, ϵ) -approximation de g dans K si les inégalités suivantes sont satisfaites $\forall p \in K$:

$$\begin{cases} |f(p) - g(p)| < \epsilon, \\ \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) - \frac{\partial g}{\partial x_i}(p) \right| < \epsilon, & i = 1, \dots, m \\ \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) - \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right| < \epsilon, & i, j = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (12)$$

Puisque les variétés étudiées dans ce chapitre sont compactes, il existe un nombre fini de voisinages U_1, \dots, U_k dont l'union est égale à M . De plus, pour chaque $i = 1 \dots k$, choisissons un ensemble compact $K_i \subset U_i$ tel qu'on ait aussi $M = K_1 \cup \dots \cup K_k$.

Ceci mène à la définition d'une (C^2, ϵ) -approximation sur M , nécessaire à la présentation du théorème d'existence qui suit.

Définition 4.10. Une fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ est une (C^2, ϵ) -approximation d'une fonction $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ si f est une (C^2, ϵ) -approximation de g sur K_l pour chaque $l = 1, \dots, k$.

Théorème 4.11. (*Existence d'une fonction de Morse*)

Soit M une m -variété compacte et $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse définie sur M . Alors il existe une fonction de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ qui soit une (C^2, ϵ) -approximation de g .

Plusieurs résultats seront énoncés avant de présenter la preuve de ce théorème. Comme il existe plusieurs fonctions lisses définies sur M , le théorème 4.11 implique également qu'il existe plusieurs fonctions de Morse définies sur M .

Lemme 4.12. Soit $\mathbb{R}^m = \{(x_1, \dots, x_m)\}$, un espace euclidien de dimension m , U , un ouvert de \mathbb{R}^m et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction lisse définie sur U . Alors il existe des coefficients $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x_1, \dots, x_m) - (a_1 x_1 + \dots + a_m x_m) \quad (13)$$

soit une fonction de Morse sur U . De plus, les coefficients a_1, \dots, a_m peuvent être choisis aussi petits que souhaité.

La preuve de ce lemme requiert une clarification de la structure introduite sur une variété topologique. Soit U , un ouvert de \mathbb{R}^m et $h : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, une application lisse envoyant un point $p = (x_1, \dots, x_m) \in U$ à un point $(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ où chaque composante s'écrit par $y_i = h_i(x_1, \dots, x_m) \forall i = 1 \dots m$. Il s'agit de la représentation de $h : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ que nous pouvons exprimer par un vecteur

$$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Définition 4.13. Le Jacobien de h en un point $p \in U$ est défini par

$$J_h(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_m}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial h_m}{\partial x_m}(p) \end{pmatrix}$$

Définition 4.14. Un point $p \in U$ avec $\det(J_h(p)) = 0$ est critique pour l'application $h : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. L'image $h(p) \in \mathbb{R}^m$ d'un point critique p est une valeur critique de h .

Le théorème de Sard, dont la preuve dépasse l'objectif de cet article, est nécessaire pour justifier l'existence d'une valeur q non critique pour h . La preuve complète du théorème 4.15 ainsi que la théorie préliminaire à celle-ci sont présentées au chapitre 6 de [Lee13].

Théorème 4.15. (*Théorème de Sard*)

L'ensemble des valeurs critiques d'une application lisse $h : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ est de mesure nulle dans \mathbb{R}^m .

Procédons à la démonstration du lemme 4.12.

Démonstration. L'idée de la preuve est de sélectionner $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ assez petits de sorte que

$$F = f(x_1, \dots, x_m) - (a_1 x_1 + \dots + a_m x_m) \quad (15)$$

soit une fonction de Morse. Définissons une application $h : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ par

$$h = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m} \end{pmatrix} \quad (16)$$

Le Jacobien de h en p est

$$J_h(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}(p) \end{pmatrix} = H_f(p)$$

Ainsi, p est un point critique de $h : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ si et seulement si $\det(H_f(p)) = 0$.

Par le théorème de Sard, comme l'ensemble des valeurs critiques dans \mathbb{R}^m est de mesure nulle pour chaque voisinage de chaque point de \mathbb{R} , il existe une valeur non critique de h , soit $q \in \mathbb{R}^m$ tel que $q = (a_1, \dots, a_m)$ (près de l'origine).

Montrons désormais que F est une fonction de Morse. Si p est un point critique pour F , alors $\frac{\partial F}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) - a_i = 0 \forall i = 1 \dots m$, et alors $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = a_i$, c'est-à-dire

$$h(p) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \quad (17)$$

par la définition de h .

Or, le fait que $q = h(p)$ n'est pas une valeur critique de h équivaut à ce que p ne soit pas un point critique de h , et donc que $\det(H_f(p)) \neq 0$.

Puisque f et F ne diffèrent que par une fonction linéaire, $H_f(p) = H_F(p)$, il s'ensuit que p est un point critique non dégénéré de F . Le fait que ce point critique soit arbitraire implique que tous les points critiques de F sont non dégénérés, et donc que F est une fonction de Morse. \square

Avant de présenter la preuve du théorème 4.11, énonçons deux autres lemmes dont les preuves seront omises puisqu'elles dépassent également l'objectif de cet article. Elles sont présentées dans [Mat02] et [Lan95].

Lemme 4.16. *Soit $C \subset M$, un ensemble compact d'une m -variété. Si une fonction $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ n'a pas de point critique dégénéré dans C , alors pour un certain $\epsilon > 0$, toute (C^2, ϵ) -approximation f de g n'a pas de point critique dégénéré dans C .*

Lemme 4.17. *Soit U , un domaine d'une carte locale (ou simplement domaine local), et K , un sous-ensemble compact de U , alors il existe une fonction lisse $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur U satisfaisant les propriétés suivantes :*

1. $0 \leq h \leq 1$
2. h prend la valeur 1 sur un voisinage ouvert V contenant K
3. h prend la valeur 0 hors d'un ensemble compact $L \subset U$ contenant V

Nous procédons désormais à la démonstration du théorème 4.11.

Démonstration. L'objectif est de construire une (C^2, ϵ) -approximation f de g . Pour ce faire, choisissons deux recouvrements de M , l'un formé des domaines locaux U_l , et l'autre formé des ensembles compacts $K_l \subset U_l$, pour $l = 1, 2, \dots, k$. L'idée de la preuve est de construire des fonctions f_l par récurrence sur l , en commençant par f_0 , n'ayant pas de point critique dégénéré dans $\bigcup_{l=1} K_l$, $l = 1, \dots, k$. Lorsque $l = k$, nous aurons la fonction de Morse désirée.

Posons $f_0 = g$ et $C_l = K_1 \cup \dots \cup K_l$ avec $C_0 = \emptyset$. Notons que C_l est compact, puisque l'union d'un nombre fini de compacts est compacte.

Comme hypothèse de récurrence, supposons que $f_{l-1} : M \rightarrow \mathbb{R}$ n'a pas de point critique dégénéré dans C_{l-1} . Construisons f_l à partir de f_{l-1} .

Soit (x_1, \dots, x_m) , le système de coordonnées choisi pour U_l . Par le lemme 4.12, il existe des coefficients a_1, \dots, a_m assez petits tels que $F_{l-1} = f_{l-1}(x_1, \dots, x_m) - (a_1x_1 + \dots + a_mx_m)$ soit de Morse sur U_l . Modifions cette fonction pour l'exprimer à l'extérieur du domaine local U_l en appliquant le lemme 4.17 à U_l et K_l , afin d'obtenir $h_l : U_l \rightarrow \mathbb{R}$.

En définissant $L_l \subset U_l$ comme un compact en dehors duquel h_l prenne la valeur 0, construisons f_l à l'intérieur de U_l (« int U_l ») et à l'extérieur de L_l (« ext L_l ») respectivement comme suit :

$$f_l = \begin{cases} f_{l-1}(x_1, \dots, x_m) - (a_1x_1 + \dots + a_mx_m)h_l(x_1, \dots, x_m) & (\text{int } U_l) \\ f_{l-1}(x_1, \dots, x_m) & (\text{ext } L_l) \end{cases}$$

Remarquons que la fonction f_l correspond à la fonction F_{l-1} dans un voisinage du compact K_l où $h_l(x_1, \dots, x_m) = 1$. Ainsi, il suit que f_l n'a pas de point critique dégénéré sur cette région.

Ensuite, vérifions que f_l est une (C^2, ϵ) -approximation de f_{l-1} . Pour ce faire, calculons les valeurs absolues des dérivées de premier et second ordres de $f_{l-1}(p) - f_l(p) = (a_1x_1 + \dots + a_mx_m)h_l(p)$ sur U_l pour $p = (x_1, \dots, x_m)$ et $i, j = 1, \dots, m$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f_{l-1}}{\partial x_i}(p) - \frac{\partial f_l}{\partial x_i}(p) \right| &= \left| (a_i h_l(p) + (a_1x_1 + \dots + a_mx_m) \frac{\partial h_l}{\partial x_i}(p)) \right| \\ \left| \frac{\partial^2 f_{l-1}}{\partial x_i \partial x_j}(p) - \frac{\partial^2 f_l}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right| &= \\ \left| (a_i \frac{\partial h_l}{\partial x_j}(p) + a_j \frac{\partial h_l}{\partial x_i}(p) + (a_1x_1 + \dots + a_mx_m) \frac{\partial^2 h_l}{\partial x_i \partial x_j}(p)) \right|, & \\ i, j = 1, \dots, m, \text{ où } p = (x_1, \dots, x_m). & \end{aligned} \tag{18}$$

Comme $0 \leq h_l \leq 1$ et que $h_l = 0$ à l'extérieur de L_l , nous pouvons borner supérieurement les dérivées d'ordre un et deux par le théorème de valeur maximale. Ainsi, en choisissant a_1, \dots, a_m suffisamment petits, f_l peut être (C^2, ϵ) -proche de f_{l-1} dans K_l . Ensuite, pour approximer f_l dans les K_j pour $j \neq l$, utilisons le système de coordonnées (y_1, \dots, y_m) dans le domaine local U_j .

L'évaluation des dérivées de $|f_{l-1}(p) - f_l(p)|$ sur $U_j \cap U_l$ s'exprime comme la partie de droite des équations du haut grâce à une transformation appropriée entre (x_1, \dots, x_m) et (y_1, \dots, y_m) .

Encore par le théorème de la valeur maximale, la valeur absolue de chaque composante du Jacobien de cette transformation sur $K_j \cap L_l$ est bornée supérieurement, alors pour des valeurs de a_1, \dots, a_m assez faibles (en valeur absolue), la partie de droite des équations sur $K_j \cap L_l$ est aussi petite que souhaité. Ainsi, comme $f_l = f_{l-1}$ à l'extérieur de L_l , nous avons que f_l est (C^2, ϵ) -proche de f_{l-1} .

Puisque ce processus peut être répété pour $l = 1, \dots, k$, il suit de la définition d'une (C^2, ϵ) -approximation que f_l en est une de $f_{l-1} \forall \epsilon > 0$.

Enfin, par l'hypothèse de récurrence, f_{l-1} n'a pas de point critique dégénéré dans C_{l-1} , et par le lemme 4.16, comme f_l est (C^2, ϵ) -proche de f_{l-1} , elle n'en a pas non plus dans C_{l-1} . De plus, puisque nous avons montré que f_l n'a pas de point critique dégénéré dans K_l , il suit que f_l n'en a pas non plus dans $C_{l-1} \cup K_l = C_l$.

Ainsi, en procédant par récurrence pour $l = 1, \dots, k$, nous obtenons que f_k n'a pas de point critique dans $C_k = M$ et donc que f_k est de Morse sur M . De plus, f_k est (C^2, ϵ') -proche de g pour ϵ' pour n'importe quel ϵ' spécifié (pas nécessairement le même ϵ). Ceci conclut la preuve. \square

4.3 Champ vectoriel gradient

Nous nous intéressons désormais au champ vectoriel gradient sur une variété M correspondant à une fonction de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ dans le but d'investiguer les décompositions en anses de la variété M (sujet de la prochaine section).

Pour ce faire, rappelons d'abord très sommairement certains concepts de calcul différentiel dans \mathbb{R}^m . Une présentation plus rigoureuse de cette théorie se trouve aux chapitres 3 et 8 de [Lee13], mais ne sera pas présentée dans cet article afin de mettre l'accent sur la théorie de Morse.

Soit M une variété de dimension m plongée dans \mathbb{R}^n (la dimension de M , n'est généralement pas la même que celle de l'espace dans lequel elle est plongée), $p \in M$ et v , un vecteur par p tangent à M . L'ensemble de tels vecteurs est $T_p M$, l'espace vectoriel tangent à M en p , qui est de même dimension que M . Le vecteur vitesse d'une courbe sur M est un exemple typique de vecteur tangent. Soit $\phi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^m$, une courbe lisse dans \mathbb{R}^m et (X_1, \dots, X_m) , les coordonnées de \mathbb{R}^m . Alors c s'exprime par :

$$c(t) = (X_1(t), \dots, X_m(t)), a < t < b. \quad (19)$$

Supposons que $0 \in (a, b)$ et que $c(0) = p$. Le vecteur de vitesse instantanée, la dérivée, en $t = 0$ est alors donné par :

$$v = \frac{dc}{dt}(0) = \left(\frac{dX_1}{dt}(0), \dots, \frac{dX_m}{dt}(0) \right). \quad (20)$$

Soit $v = (v_1, \dots, v_m) \in T_p(M)$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, une fonction définie dans un voisinage $U \subset M$ de p . Considérons une courbe comme dans (19) telle que $c(0) = p$. Si la vitesse initiale de cette courbe est v , alors nous avons :

$$v = \frac{dc}{dt}(0) \implies \frac{dX_j}{dt}(0) = v_j, j = 1, \dots, m. \quad (21)$$

Enfin, considérons la restriction de f à la courbe c , soit une fonction à une variable $f(c(t))$, que nous dérivons en $t = 0$ à l'aide de la règle de dérivation en

chaîne pour obtenir le résultat suivant :

$$\begin{aligned} \frac{df(c(t))}{dt} \Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt} f(X_1(t), \dots, X_m(t)) \Big|_{t=0} \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial X_j}(p) \frac{dX_j}{dt}(0) \\ &= \sum_{j=1}^m v_j \frac{\partial f}{\partial X_j}(p). \end{aligned} \quad (22)$$

Nous voyons avec la dernière ligne que le résultat ne dépend pas de c , alors la dérivée $\frac{df(c(t))}{dt} \Big|_{t=0}$ s'écrit comme $v \cdot f$, soit la dérivée directionnelle de f vers v . De plus, (22) indique que $v \cdot f > 0$ si et seulement si $f(c(t))$ croît, c'est-à-dire si et seulement si v pointe vers là où f croît.

Définissons à présent un champ vectoriel et une généralisation d'un champ vectoriel gradient.

Définition 4.18. Un champ vectoriel X sur U , un domaine d'une carte locale dans M , est défini par :

$$X = \xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \xi_m \frac{\partial}{\partial x_m} \quad (23)$$

où ξ_1, \dots, ξ_m sont des fonctions définies sur U . Si ces fonctions sont lisses, X est un champ vectoriel lisse sur U . Lorsque $\xi_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, X est le champ vectoriel gradient de f , noté X_f .

En d'autres mots, un champ vectoriel X sur une variété lisse M peut être vu comme une application associant à chaque $p \in M$ un vecteur $c \in T_p M$, puis l'expression $X \cdot f$ représente la dérivée directionnelle de f selon X , c'est-à-dire que $(X \cdot f)(p)$ représente la dérivée de f au point p dans la direction du vecteur $X(p)$.

Définition 4.19. Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse sur une m -variété M compacte et X un champ vectoriel lisse sur M , alors X est un *champ vectoriel de type gradient* (gradient-like vector field, [Mat02]) pour f si les deux conditions suivantes sont respectées :

1. $X \cdot f > 0$ à l'extérieur des points critiques de f
2. Si p_0 est un point critique de f d'indice λ , alors p_0 a un voisinage V avec un système de coordonnées (x_1, \dots, x_m) tel que f ait la forme standard suivante :

$$f = -x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_m^2 + f(p_0) \quad (24)$$

et tel que X s'écrive comme son champ vectoriel gradient comme suit :

$$X = -2x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - \dots - 2x_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\lambda} + 2x_{\lambda+1} \frac{\partial}{\partial x_{\lambda+1}} + \dots + 2x_m \frac{\partial}{\partial x_m}. \quad (25)$$

Remarque 4.20. Si X est un champ vectoriel de type gradient pour f , alors $X \cdot f = (\sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}) \cdot f = \sum_{i=1}^m (\frac{\partial f}{\partial x_i})^2 \geq 0$, où l'égalité survient aux points critiques de f . Ainsi, en dehors des points critiques de f , X pointe dans la direction de la croissance de f (premier point de la définition).

De façon similaire à la fonction de Morse, nous pouvons montrer l'existence d'un champ vectoriel de type gradient.

Théorème 4.21. *Si $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Morse sur une variété compacte M , alors il existe un champ vectoriel de type gradient X pour f .*

Démonstration. Similairement à la preuve du théorème 4.11, choisissons un recouvrement fini U_1, \dots, U_k de M ainsi qu'un ensemble compact K_j pour chaque U_j tel que K_1, \dots, K_k recouvre M . De plus, supposons que chaque point critique p_i a un voisinage V_i contenu dans exactement un des domaines locaux U_i , et que f prenne une forme standard dans chaque U_i .

L'idée de la preuve est de construire un champ vectoriel gradient X_j de f dans chaque U_j afin d'obtenir le champ X désiré.

Afin de définir un champ vectoriel lisse X sur l'entièreté de M , considérons $h_j : U_j \rightarrow \mathbb{R}$ telle que h_j soit une fonction lisse avec $0 \leq h_j \leq 1$, où $h_j = 1$ dans un voisinage V_j de K_j et $h_j = 0$ à l'extérieur d'un compact $L_j \subset U_j$ contenant V_j , comme dans le lemme 4.17, laquelle nous prolongeons à une application lisse $h_j : M \rightarrow \mathbb{R}$ en posant $h_j = 0$ à l'extérieur de U_j .

Soit X_j le champ gradient de f sur l'ouvert U_j . Considérons le champ vectoriel $h_j X_j$ qui assigne à chaque point $p \in U_j$ le vecteur $h_j(p)X_j(p)$, lequel nous prolongeons également à un champ vectoriel lisse sur M en posant $h_j X_j = (0, \dots, 0)$ à l'extérieur de U_j .

Montrons à présent que $\sum_{j=1}^k h_j X_j$ est le champ vectoriel de type gradient désiré.

D'abord si $p \in U_j$, alors $(X_j \cdot f)(p) \geq 0$, puis si $p \notin U_j$, alors $h_j X_j(p) = 0$. Ainsi, la dérivée de f en chaque composante de la somme $\sum_{j=1}^k h_j X_j$ satisfait $(h_j X_j \cdot f)(p) \geq 0$. Rappelons que les ensembles compacts K_1, \dots, K_k recouvrent M et donc p est contenu dans au moins un d'eux, disons K_j , où $h_j = 1$ et $(X_j \cdot f)(p) > 0$. Ceci montre que la dérivée de f par au moins un des termes de la somme est strictement positif, d'où $X \cdot f > 0$, soit la condition (i) de la définition 4.19.

Ensuite, nous avons choisi un voisinage V d'un point critique p_0 contenu dans seulement un U_i dans lequel $h_j = 1$. De plus, f a une forme standard sur U_i et donc $h_i X_i$ est un champ vectoriel de la forme (25) dans V . Puisque le reste des termes $h_j X_j$ de X sont nuls dans V , nous avons que X satisfait la condition (ii) de la définition 4.19, ce qui montre l'existence d'un champ vectoriel de type gradient. \square

Afin de mettre la table pour la prochaine section, définissons brièvement les courbes intégrales (integral curves, [Mat02]) d'un champ vectoriel X sur une variété M .

Définition 4.22. Une courbe $c(t)$ est une courbe intégrale d'un champ vectoriel X si $\frac{dc}{dt}(t) = X_{c(t)}$ pour chaque t où $c(t)$ est définie. Le terme $\frac{dc}{dt}(t)$ correspond au vecteur vitesse de la courbe c .

En d'autres mots, une courbe intégrale d'un champ vectoriel X est le chemin d'une particule se déplaçant avec X selon son vecteur vitesse. Si X est un champ vectoriel de type gradient d'une fonction de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, où M est une variété lisse compacte sans bord, alors la courbe intégrale $c_p(t)$, commençant à un point arbitraire p , approche un point critique p_0 lorsque $t \rightarrow \infty$ et $t \rightarrow -\infty$. Lorsque la courbe approche p_0 , le vecteur vitesse diminue de sorte que la particule n'atteigne jamais p_0 .

Théorème 4.23. *Si f n'a pas de valeur critique dans l'intervalle $[a, b]$, alors $M_{[a,b]} = \{p \in M \mid a \leq f(p) \leq b\}$ est diffeomorphe au produit $f^{-1}(a) \times [0, 1]$.*

Démonstration. Soit X , un champ vectoriel de type gradient pour f . Puisque $X \cdot f > 0$ pour les points non critiques de f , nous pouvons définir un nouveau champ vectoriel Y sur M dont nous excluons les points critiques tel que $Y = \frac{1}{X \cdot f} X$. Par hypothèse (de l'énoncé), $M_{[a,b]}$ ne contient pas de point critique de f , alors M est dans le domaine de Y . Considérons la courbe intégrale $c_p(t)$ de Y commençant à un point p de $f^{-1}(a)$. Par la définition du vecteur vitesse, nous obtenons :

$$\frac{d}{dt}f(c_p(t)) = \frac{dc}{dt}(t) \cdot f = Y_{c(t)} \cdot f = \frac{1}{X \cdot f} X \cdot f = 1 \quad (26)$$

Comme la courbe intégrale $c_p(t)$ commence au niveau $f = a$ au temps $t = 0$, elle atteindra le niveau $f = b$ au temps $t = b - a$.

Définissons une application $h : f^{-1}(a) \times [0, b - a] \rightarrow M_{[a,b]}$ par $h(p, t) = c_p(t)$. Nous pouvons désormais montrer que h est un diffeomorphisme en utilisant le fait que $c_p(t)$ soit lisse selon p et t ainsi que le fait que deux courbes intégrales distinctes ne se rencontrent pas. La preuve se conclut en remarquant que $f^{-1}(a) \times [0, b - a] \cong f^{-1}(a) \times [0, 1]$. \square

Cette section prend fin avec un résultat facilitant l'analyse des points critiques.

Théorème 4.24. *Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse sur M dont les points critiques sont p_1, \dots, p_r , alors il existe une fonction de Morse f' sur M ayant les mêmes points critiques que f et telle que $f'(p_i) \neq f'(p_j)$ si $p_i \neq p_j$ pour $i, j = 1, \dots, r$. De plus, f' peut être prise comme (C^2, ϵ) -approximation de f .*

Démonstration. Supposons que les points critiques p_1 et p_2 de f correspondent à la même valeur critique $c = f(p_1) = f(p_2)$, puis modifions légèrement f . Par le lemme 4.12, nous pouvons choisir un système de coordonnées (x_1, \dots, x_m) pour p_1 où f ait la forme $f = -x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_m^2 + c$.

Calculons $X_f \cdot f$, où X_f est le champ vectoriel gradient de f pour les coordonnées données :

$$X_f \cdot f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_\lambda} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_m} \right)^2 = 4(x_1^2 + \dots + x_\lambda^2 + \dots + x_m^2). \quad (27)$$

Considérons, pour $\epsilon > 0$, $D_{2\epsilon}$ et D_ϵ , les disques de dimension m centrés en p_1 de rayons 2ϵ et ϵ respectivement. Il suit cette équation que $4\epsilon^2 \leq X_f \cdot f \leq 4(2\epsilon)^2$ dans la région $D_{2\epsilon} - \text{int}D_\epsilon$.

Notons par K l'ensemble compact D_ϵ et par U , $\text{int}(D_{2\epsilon})$ de sorte que U soit un ouvert contenant un compact K . Considérons, comme dans le lemme 4.17, la fonction $h : U \rightarrow \mathbb{R}$, laquelle nous prolongeons à une fonction lisse sur l'entière de M en posant $h = 0$ à l'extérieur de U .

Posons désormais $\tilde{f} = f + ah$. Puisque $f = \tilde{f}$ à l'extérieur de U , \tilde{f} et f ont les mêmes points critiques. Ainsi, le seul endroit où \tilde{f} a possiblement un ensemble de points critiques différents est la région entre D_ϵ et $D_{2\epsilon}$.

Calculons alors les différences des premières dérivées partielles de \tilde{f} et f :

$$\left| \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| = \left| a \frac{\partial h}{\partial x_i} \right| \quad (28)$$

Il suit alors que tant que la valeur absolue de a est assez petite, la différence entre $\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2$ et $\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i} \right)^2$ est assez petite, puis comme $\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 = X_f \cdot f$ atteint sa valeur minimale $4\epsilon^2 > 0$ entre $D_{2\epsilon}$ et D_ϵ , alors $\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i} \right)^2$ prend sa valeur minimale non nulle dans cette région également. Ainsi \tilde{f} n'a pas de valeur critique dans cette région.

Nous pouvons conclure que f et \tilde{f} ont le même ensemble de valeurs critiques, donc \tilde{f} est aussi une fonction de Morse. De plus, nous avons que $\tilde{f}(p_1) = f(p_1) + a$ et $\tilde{f}(p_2) = f(p_2)$, alors même si $f(p_1) = f(p_2)$, $\tilde{f}(p_1) \neq \tilde{f}(p_2)$. Nous pouvons réutiliser cet argument pour définir une fonction dont les valeurs critiques sont distinctes pour des points critiques distincts. Enfin, pour montrer que \tilde{f} est une (C^2, ϵ) -approximation de f , nous appliquons le même argument que dans la preuve du théorème 4.11. \square

5 Décomposition en anses

Dans cette section, inspirée de [Mat02], nous nous intéressons à la variation, selon t , du sous-ensemble $M_t = \{p \in M \mid f(p) \leq t\}$ d'une variété compacte M sur laquelle une fonction de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ est définie.

Le théorème suivant est une adaptation plus concrète du théorème 4.23 de la section précédente. La preuve nécessite cependant une compréhension plus approfondie que ce qui a été présenté sur les courbes intégrales, et par conséquent sera omise de cet article. Voir [Mat02] pour les détails.

Théorème 5.1. *Si f n'a pas de valeur critique dans $[a, b]$, alors les sous-variétés M_a et M_b sont difféomorphes.*

Nous remarquons de ce théorème que M_t ne change que lorsque t passe par une valeur critique.

De plus, par le corollaire 4.9, f admet un nombre fini de points critiques p_i , disons $n + 1$, puis par le théorème 4.24, nous pouvons supposer que les valeurs critiques $c_i = f(p_i)$ sont distinctes, telles que $c_0 < c_1 < \dots < c_n$.

Avec la notation de l'introduction de la section, nous remarquons que $M_t = \emptyset$ si $t < c_0$, et que $M_t = M$ si $t \geq c_n$. Observons de plus près l'allure de M_t aux alentours du minimum c_0 grâce à la forme standard de f , laquelle ne contient pas de signe négatif puisque $f \geq c_0$. L'indice de p_0 est donc 0.

$$f = x_1^2 + \dots + x_m^2 + c_0 \quad (29)$$

Ce qui a été mentionné plus haut peut se récrire par $M_{c_0-\epsilon} = \emptyset$, puis nous pouvons exprimer $M_{c_0+\epsilon}$ à l'aide de l'équation 29 comme suit :

$$M_{c_0+\epsilon} = \{(x_1, \dots, x_m) | x_1^2 + \dots + x_m^2 \leq \epsilon\} \quad (30)$$

Ce qui nous indique que $M_{c_0+\epsilon}$ est difféomorphe au disque D^m , que nous appellerons bientôt 0-anse.

Le théorème suivant, dont la preuve sera omise pour les mêmes raisons que celle du théorème 5.1, décrit le passage par une valeur critique.

Théorème 5.2. *L'ensemble $M_{c_i+\epsilon}$ est difféomorphe à la variété obtenue en attachant une λ -anse à $M_{c_i-\epsilon}$, c'est-à-dire $M_{c_i+\epsilon} \cong M_{c_i-\epsilon} \cup D^\lambda \times D^{m-\lambda}$.*

Attacher une λ -anse $D^\lambda \times D^{m-\lambda}$ à $M_{c_i-\epsilon}$ en collant $\partial D^\lambda \times D^{m-\lambda}$ le long des bords de $M_{c_i-\epsilon}$ se fait en définissant une application $\phi : \partial D^\lambda \times D^{m-\lambda} \rightarrow \partial M_{c_i-\epsilon}$ identifiant chaque point $p \in \partial D^\lambda \times D^{m-\lambda}$ avec $\phi(p) \in \partial M_{c_i-\epsilon}$.

Les anses mentionnées au théorème précédent motivent la prochaine définition.

Définition 5.3. Une variété avec bords obtenue à partir de D^m en y attachant des anses de divers indices est un corps en anses de dimension m . Il se définit plus précisément par sa construction selon les trois étapes suivantes :

1. Le disque D^m correspondant à une 0-anse est un corps en anses
2. La variété $D^m \cup_{\phi_1} D^{\lambda_1} \times D^{m-\lambda_1}$ obtenue de D^m en attachant une λ_1 -anse avec une fonction de collage ϕ_1 est un corps en anses noté $\mathcal{H}(D^m; \phi_1)$
3. Si $N = \mathcal{H}(D^m; \phi_1, \dots, \phi_{i-1})$ est un corps en anses, alors la variété $N \cup_{\phi_i} D^{\lambda_i} \times D^{m-\lambda_i}$ obtenue de N en attachant une λ_i -anse $D^{\lambda_i} \times D^{m-\lambda_i}$ avec une fonction de collage ϕ_i est un corps en anses de dimension m , noté $\mathcal{H}(D^m; \phi_1, \dots, \phi_{i-1}, \phi_i)$

Remarque 5.4. L'expression *attacher une anse* cache un recollement ϕ (attaching map, [Mat02]) correspondant à un *plongement lisse* (smooth embedding, [Mat02]).

Théorème 5.5. (*Décomposition en anses d'une variété*)

Lorsqu'une fonction de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ est donnée sur une variété compacte, une structure d'un corps en anses sur M est déterminée par f . Les anses de ce corps en anses correspondent aux points critiques de f , et les indices de ces anses coïncident avec les indices des points critiques de f correspondants. En d'autres mots, M peut s'exprimer comme un corps en anses. Lorsqu'une variété est ainsi exprimée, elle est appelée décomposition en anses.

Démonstration. En choisissant judicieusement une (C^2, ϵ) -approximation, supposons que tous les points critiques d'une fonction de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ puissent correspondre à des valeurs critiques $c_i = f(p_i)$ distinctes (théorème 4.24) classées en ordre croissant, puis nommons λ_i , l'indice du point critique p_i . Soit X un champ vectoriel de type gradient pour la fonction de Morse f sur M . La preuve du théorème 5.5 sera faite par récurrence sur i .

D'abord pour $i = 0$, l'indice de p_0 est 0, puis $M_{c_0+\epsilon}$ est diffeomorphe au disque D^m , tel que mentioné plus haut, qui est un corps en anses par le premier point de la définition.

Supposons ensuite, comme hypothèse de récurrence, que $M_{c_{i-1}+\epsilon}$ est un corps en anses $\mathcal{H}(D^m; \phi_1, \dots, \phi_{i-1})$. Montrons que $M_{c_i+\epsilon}$ est un corps en anses $\mathcal{H}(D^m; \phi_1, \dots, \phi_{i-1}, \phi_i)$.

Rappelons que $M_{c_i+\epsilon}$ est diffeomorphe à la variété obtenue en attachant une λ_i -anse à $M_{c_i-\epsilon}$ (5.2) par l'application de collage $\phi : \partial D^{\lambda_i} \times D^{m-\lambda_i} \rightarrow \partial M_{c_i-\epsilon}$.

Comme l'intervalle $[c_{i-1} + \epsilon, c_i - \epsilon]$ ne contient pas de valeurs critiques, $M_{c_{i-1}+\epsilon}$ est diffeomorphe à $M_{c_i-\epsilon}$ par le théorème 5.1. Ce diffeomorphisme, $\psi : M_{c_{i-1}+\epsilon} \rightarrow M_{c_i-\epsilon}$, est donné en laissant $M_{c_{i-1}+\epsilon}$ « glisser » le long du champ vectoriel de type gradient X jusqu'à ce qu'il corresponde à $M_{c_i-\epsilon}$.

Par l'hypothèse de récurrence (laquelle indique que $M_{c_{i-1}+\epsilon}$ est un corps en anses $\mathcal{H}(D^m; \phi_1, \dots, \phi_{i-1})$), nous avons que $M_{c_i-\epsilon}$ est diffeomorphe au même corps en anses. Ainsi, la variété $M_{c_i+\epsilon}$ est aussi diffeomorphe à un corps en anses par le troisième point de la définition 5.3. Ceci achève la preuve. \square

Détaillons davantage l'application de recollement de la nouvelle λ_i -anse. Par l'hypothèse de récurrence, $M_{c_{i-1}+\epsilon}$ est le corps en anses $\mathcal{H}(D^m; \phi_1, \dots, \phi_{i-1})$ de sorte que le diffeomorphisme ψ énoncé plus haut puisse être vu comme un diffeomorphisme de $\mathcal{H}(D^m; \phi_1, \dots, \phi_{i-1})$ à $M_{c_i-\epsilon}$. Plus précisément, la λ_i -anse est attachée à $M_{c_i-\epsilon}$ plutôt qu'au corps en anses $\mathcal{H}(D^m; \phi_1, \dots, \phi_{i-1})$.

Ainsi, lorsque $M_{c_i-\epsilon}$ est identifiée avec le corps en anses $\mathcal{H}(D^m; \phi_1, \dots, \phi_{i-1})$ par le diffeomorphisme ψ , la λ_i -anse est attachée au corps en anses par la composition $\psi^{-1} \circ \phi : \partial D^{\lambda_i} \times D^{m-\lambda_i} \rightarrow \partial \{\mathcal{H}(D^m; \phi_1, \dots, \phi_{i-1})\}$. Alors en posant $\psi^{-1} \circ \phi = \phi_i$, nous obtenons effectivement que $M_{c_i+\epsilon}$ est le corps en anses $\mathcal{H}(D^m; \phi_1, \dots, \phi_{i-1}, \phi_i) = \mathcal{H}(D^m; \phi_1, \dots, \phi_{i-1}) \cup_{\phi_i} D^{\lambda_i} \times D^{m-\lambda_i}$.

Consolidons la théorie présentée dans cet article à l'aide de deux exemples, le premier étant une généralisation des exemples 3.15 et 4.3, puis le second détaillant l'exemple 3.16.

Exemple 5.6. Soit $S^m = \{(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}) \mid x_1^2 + \dots + x_m^2 + x_{m+1}^2 = 1\}$, la sphère de dimension m , sur laquelle nous définissons $f : S^m \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}) = x_{m+1}$, la fonction hauteur selon la $m+1$ -ième coordonnée.

Les dérivées de premier ordre sur les hémisphères U_{m+1}^\pm sont $\frac{\partial f}{\partial x_i} = -\frac{x_i}{x_{m+1}}$, alors les deux seuls points critiques de f sont $(0, \dots, \pm 1)$. Nous validons également qu'ils sont non dégénérés, faisant de f une fonction de Morse.

Cet exemple mène au théorème suivant [Mil63] :

Théorème 5.7. *S'il existe une fonction de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ sur une m -variété compacte M ayant seulement deux points critiques, alors M est homéomorphe à la sphère S^m .*

Discutons de l'idée générale de la preuve du théorème 5.7.

Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction de Morse n'ayant que deux points critiques définie sur une m -variété compacte M . Par le théorème de valeur maximale, f admet un minimum en $A = f(a) \in \mathbb{R}$ et un maximum en $B = f(b) \in \mathbb{R}$.

Par la forme standard du théorème 4.5, pour un certain $\epsilon > 0$, les ensembles $f^{-1}([A, A + \epsilon])$ et $f^{-1}([B - \epsilon, B])$ sont homéomorphes à des m -disques.

Par le théorème 5.1, $f^{-1}([A, A + \epsilon])$ est difféomorphe à $f^{-1}([A, A + B - \epsilon])$.

Ainsi, $M = f^{-1}([A, A + \epsilon]) \cup_\phi f^{-1}([B - \epsilon, B])$, où ϕ est le recollement autour des bords communs des deux m -disques.

La preuve se conclut en construisant un homéomorphisme entre M et S^m .

Exemple 5.8. L'espace projectif $\mathbb{R}\mathbb{P}^m$ (aussi noté \mathbb{P}^m) défini à l'exemple 3.16 est compact grâce au théorème 2.10 et à la projection (fonction continue) de S^m sur \mathbb{P}^m . En effet, ceci s'observe en choisissant α de sorte que $y_1^2 + \dots + y_{m+1}^2 = 1$, où α est celui de la relation d'équivalence des éléments de \mathbb{P}^m :

$$[y_1, \dots, y_{m+1}] = [x_1, \dots, x_{m+1}] \iff (y_1, \dots, y_{m+1}) = \alpha(x_1, \dots, x_{m+1}).$$

Pour $a_1 < \dots < a_{m+1}$, considérons la fonction $f : \mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f([x_1, \dots, x_m, x_{m+1}]) = \frac{a_1 x_1^2 + \dots + a_{m+1} x_{m+1}^2}{x_1^2 + \dots + x_{m+1}^2}.$$

Cette fonction est bien définie sur \mathbb{P}^m , puisqu'elle ne change pas lorsque nous remplaçons x_i par αx_i .

Considérons ensuite les ouverts des cartes locales définies à l'exemple 3.16. Les expressions de f et de son gradient dans le système de coordonnées locales sont données par :

$$f(X_1, \dots, X_m) = \frac{a_1 X_1^2 + \dots + a_{i-1} X_{i-1}^2 + a_i + a_{i+1} X_i^2 + \dots + a_{m+1} X_m^2}{X_1^2 + \dots + X_{i-1}^2 + 1 + \dots + X_m^2} \quad (31)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial X_m} = \frac{2X_m\{(a_{m+1} - a_1)X_1^2 + \dots + (a_{m+1} - a_m)X_{m-1}^2 + a_{m+1} - a_i\}}{(X_1^2 + \dots + X_m^2 + 1)^2} \quad (32)$$

Comme $a_1 < \dots < a_{m+1}$, $\frac{\partial f}{\partial X_m}$ s'annule si et seulement si $X_m = 0$, puis la dérivée partielle de la restriction $f|_{X_m=0}$ selon X_{m-1} s'annule si et seulement si $X_{m-1} = 0$, processus que nous répétons afin d'obtenir qu'un point critique de f dans le voisinage U_i doit satisfaire $X_i = \dots = X_m = 0$.

Ensuite, en dérivant l'équation 31 selon X_1 jusqu'à X_{i-1} , nous pouvons conclure que le seul point critique de f sur U_i est l'origine dans le système de coordonnées (X_1, \dots, X_m) , c'est-à-dire $[0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]$, où la i -ième coordonnée est 1.

La matrice hessienne $(\frac{\partial^2 f}{\partial X_j \partial X_k})$ en ce point est diagonale et a un déterminant non nul, puisque les $(i - 1)$ premiers éléments de sa diagonale sont négatifs, et les autres sont positifs. Le point critique est donc non dégénéré d'indice $i - 1$.

Ainsi, la fonction de Morse $f : \mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{R}$ a $m + 1$ points critiques d'indices $0, 1, \dots, m$, donnant à \mathbb{P}^m la décomposition en anses suivante :

$$P^m = D^m \cup D^1 \times D^{m-1} \cup D^2 \times D^{m-2} \cup \dots \cup D^{m-1} \times D^1 \cup D^m. \quad (33)$$

Remarque 5.9. En particulier, il suit de l'exemple 5.8 que la droite projective \mathbb{P}^1 est difféomorphe au cercle \mathbb{S}^1 , car leur décomposition en anses est $D^1 \cup D^1$.

6 Conclusion

Nous avons d'abord vu quelques notions préliminaires sur les espaces topologiques, les variétés lisses M ainsi que les fonctions lisses $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Ensuite nous avons vu les définitions et les résultats centraux de la théorie de Morse. En particulier, nous avons vu qu'autour de chaque point critique $p \in M$ d'une fonction de Morse f , il existe un système de coordonnées (x_1, \dots, x_m) dans lequel f se représente par $f(x_1, \dots, x_m) = -x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + \dots + x_m^2 + f(p)$, de sorte que chaque point critique puisse être associé à un indice λ . De plus, nous avons vu que toute fonction lisse g sur une variété compacte M peut être approximée par une fonction de Morse aussi près de g que désiré.

Ensuite, nous avons présenté l'existence d'un champ vectoriel de type gradient pour une fonction de Morse f , X_f , afin de prouver par exemple que $M_{[a,b]} = \{p \in M \mid a \leq f(p) \leq b\}$ est difféomorphe à $f^{-1}(a) \times [0, 1]$ lorsqu'il n'y a pas de valeur critique dans $[a, b]$, puisque les courbes intégrales de X_f définissent un difféomorphisme entre ces deux ensembles.

Nous avons d'ailleurs vu que ce dernier résultat implique que les espaces $M_a = \{p \in M \mid f(p) \leq a\}$ et $M_b = \{p \in M \mid f(p) \leq b\}$ sont toujours difféomorphes lorsqu'aucune valeur critique est comprise dans l'intervalle $[a, b]$, mais qu'au contraire lorsqu'il existe $p \in M$ critique tel que $f(p) \in [a, b]$, alors M_a et M_b ont

une forme fondamentalement différente. Plus précisément, nous pouvons voir M_b comme un recollement d'une λ -anse à M_a , où λ est l'indice du point critique p .

En somme, dans cet article nous avons vu qu'en considérant les valeurs critiques d'une fonction de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ et les indices associés, M peut s'exprimer comme une suite de recollements de λ_i -anses dit corps en anses.

Cependant, il y a de multiples notions que nous n'avons pas détaillées, par exemple les plans tangents et les courbes intégrales nécessaires aux démonstrations des théorèmes sur les difféomorphismes, ou encore la notion de plongement lisse (smooth embedding, [Lee13]) nécessaire à la définition de sous-variété lisse. Un lecteur intéressé peut se tourner vers les chapitres 3, 4, 5, 8 et 9 de [Lee13].

De plus, il y a plusieurs concepts connexes que nous n'avons pas mentionnés, par exemple les groupes d'homologie d'une variété M ainsi que leurs liens avec le nombre de points critiques d'une fonction de Morse sur M , ou encore la classification des variétés de dimension $m \leq 4$. Ces notions sont abordées aux chapitres 4 et 5 de [Mat02].

Comme cet article visait à introduire la topologie différentielle par le biais de la théorie de Morse et que cette dernière n'ait été que très brièvement survolée, nous pouvons imaginer tous les sujets encore à découvrir et à approfondir.

Références

- [BDM17] William E BOYCE, Richard C DiPRIMA et Douglas B MEADE : *Elementary differential equations*. John Wiley & Sons, 2017.
- [Bot80] Raoul BOTT : Marston morse and his mathematical works. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 3(3):907–950, 1980.
- [Hat04] Allen HATCHER : The classification of 3-manifolds—a brief overview. *Unpublished talk available online at <http://www.math.cornell.edu/hatcher>*, 2004.
- [Hat22] Allen HATCHER : The kirby torus trick for surfaces, 2022.
- [Ker60] Michel A KERVAIRE : A manifold which does not admit any differentiable structure. *Comment. Math. Helv*, 34(1):257–270, 1960.
- [Knu15] Kevin P KNUDSON : *Morse theory : Smooth and discrete*. World Scientific Publishing Company, 2015.
- [Lan95] Serge LANG : *Differential and Riemannian Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1995.
- [Lee13] John M. LEE : *Introduction to Smooth Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer Science and Business Media, 2013.
- [LLT04] Thomas LEWINER, Helio LOPES et Geovan TAVARES : Applications of forman's discrete morse theory to topology visualization and mesh

- compression. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 10(5):499–508, 2004.
- [Mat02] Y. MATSUMOTO : *An Introduction to Morse Theory*. Iwanami series in modern mathematics. American Mathematical Society, 2002.
- [Mil63] John MILNOR : *Morse Theory. (AM-51), Volume 51*. Princeton University Press, 1963.
- [N⁺11] Liviu I NICOLAESCU *et al.* : *An invitation to Morse theory*. Springer, 2011.
- [NI14] Francis NIER et Dragoş IFTIMIE : Introduction à la topologie. *Université de Rennes 1*, 2014.

GENEVIÈVE SOROKA-PERRAS
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
Courriel: Geneviève.Soroka-Perras@USherbrooke.ca

Une introduction aux théories topologiques des champs quantiques

Zoïk Dubois

Reçu le 2023-08-30 et accepté le 2025-06-04

RÉSUMÉ Cet article est dédié à présenter les théories topologiques des champs quantiques de manière accessible pour les étudiants au baccalauréat. Tout d'abord, l'origine et l'intérêt de ces objets mathématiques seront abordés. Ensuite, il sera introduit les théories topologiques des champs quantiques de dimensions 2 pour lesquelles il existe une représentation graphique très intéressante afin d'introduire ces objets. Cela mènera à l'exposition des axiomes définissant les théories topologiques des champs quantiques. Il sera ensuite présenté un exemple de théorie de dimension 2. Finalement, l'article se terminera avec quelques remarques et généralisations qui démontreront la complexité et l'intérêt des théories topologiques des champs quantiques.

1 Introduction

Les théories topologiques des champs quantiques (*topological quantum field theories* (TQFT) en anglais) proviennent du désir de trouver une fondation mathématique solide pour définir les théories des champs quantiques développées par les physiciens. Les calculs dans ce domaine ne sont pas habituellement défini avec un formalisme rigide, d'où l'intérêt de trouver une théorie permettant de bien les définir. Cette quête peut se représenter comme le développement d'une théorie permettant de faire un lien entre la géométrie et l'algèbre linéaire. Pour le cas particulier où l'on se restreint à la topologie, il est possible de définir une telle association avec des axiomes. Cette axiomatisation provenant du mathématicien Michael Atiyah est la base des théories topologiques des champs quantiques [Ati88]. Ainsi, dans son expression la plus simple, une TQFT est une règle d'association entre des espaces géométriques, par exemple les surfaces dans \mathbb{R}^3 , et les espaces vectoriels respectant une série d'axiomes définis par Atiyah. C'est pour cette raison que les TQFTs ont obtenu une place importante dans la théorie quantique, car dès qu'une règle de correspondance respecte les axiomes elle

En premier lieu, j'aimerais remercier Professeur Maxence Mayrand pour m'avoir soutenu financièrement et pour avoir supervisé le stage duquel cet article en est l'accomplissement. Aussi, je remercie les membres du groupe S.A.G. et le département de mathématiques de l'Université de Sherbrooke pour leur contribution à la bourse que j'ai reçue pour ce stage en recherche. Finalement, j'aimerais mentionner la participation de mes parents qui m'ont soutenu moralement tout au long de cette aventure.

est par définition une TQFT ce qui simplifie d'une certaine manière la structure de l'espace géométrique source. En informatique, elles participent au développement de l'informatique topologique quantique, une variante de l'informatique quantique qui serait possiblement moins sensible au bruit dans son traitement de l'information. Finalement, pour les mathématiciens, c'est un outil qui sert à trouver des invariants aux variétés et aux nœuds.

L'objectif de ce présent article sera de présenter ces objets mathématiques aux multiples applications. Premièrement, les TQFTs de dimension 2 seront présentées. La structure géométrique et les propriétés des surfaces impliquées dans les TQFTs de cette dimension seront abordées. Ensuite, une généralisation des conditions que doivent respecter les TQFTs de dimension 2 sera proposée. Après, un exemple concret de TQFTs sera présenté. Dans cette section, une TQFT sera explicitement définie ce qui sera suivi d'un cas particulier précisant la définition de la TQFT. Finalement, la dernière section sera adressée au lecteur souhaitant pousser plus loin sa connaissance des TQFTs. Des remarques sur ce qui a été abordé dans l'article y seront fournies ainsi qu'une référence pertinente sur les théories topologiques des champs quantiques.

1.1 Notion préliminaire : Le produit tensoriel

Avant de commencer la présentation des TQFTs, il convient d'aborder la notion de produit tensoriel qui sera nécessaire ultérieurement. Pour assurer une bonne compréhension aux lecteurs de tous les niveaux, seulement les grandes lignes et les caractéristiques importantes pour le présent sujet seront exposées.

Tout d'abord, tous les produits tensoriels respectent ce qui est nommé *la propriété universelle du produit tensoriel*.

Définition 1.1. (*Propriété universelle du produit tensoriel*) Le produit tensoriel $V \otimes W$ est un espace vectoriel accompagné d'une application $\otimes : (v, w) \rightarrow v \otimes w$ de $V \times W$ à $V \otimes W$ telle que pour toutes applications bilinéaires $h : V \times W \rightarrow Z$, il existe une unique application linéaire $\tilde{h} : V \otimes W \rightarrow Z$ telle que $h = \tilde{h} \circ \otimes$ où Z est un espace vectoriel. Cela est représenté par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\otimes} & V \otimes W \\ & \searrow h & \downarrow \exists! \tilde{h} \\ & & Z \end{array}$$

Ainsi, le produit tensoriel de l'espace V et de l'espace W est un nouvel espace vectoriel qui est noté par $V \otimes W$ et dont la dimension est égale au produit des dimensions des deux espaces vectoriels respectifs. Cette propriété de la dimension est propre au produit tensoriel, de manière similaire à la dimension d'une somme directe d'espaces où elle est la somme des dimensions des espaces originaux. De plus, de cette propriété universelle il découle que s'il existe une autre application \otimes_2 de $V \times W$ à $V \otimes W$ satisfaisant la propriété universelle, les espaces $V \otimes W$

et $V \otimes_2 W$ seront isomorphes. Ainsi, on déduit que tous les différents produits tensoriels sont isomorphes entre eux. Finalement, les vecteurs d'un tel espace sont appelés des « tenseurs » et sont des combinaisons linéaires des « tenseurs purs » notés par $v \otimes w$ où $v \in V$ et $w \in W$. Pour les besoins de l'article, il suffit de comprendre les propriétés suivantes du produit tensoriel. Soient $V \otimes W$, $v_1, v_2 \in V$, $w_1, w_2 \in W$ et $\alpha \in \mathbb{k}$ où \mathbb{k} est un corps quelconque, on a que :

- $\alpha \cdot (v_1 \otimes w_1) = \alpha \cdot v_1 \otimes w_1 = v_1 \otimes \alpha \cdot w_1$
- $(v_1 + v_2) \otimes w_1 = v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_1$
- $v_1 \otimes (w_1 + w_2) = v_1 \otimes w_1 + v_1 \otimes w_2$.

Pour mieux comprendre, voici un exemple concret qui en même temps introduira un isomorphisme qui sera utilisé dans la définition de la TQFT en exemple.

Exemple 1.2. Soit $\mathbb{C}[G]$ l'espace vectoriel de toutes les fonctions $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ où G est un groupe fini quelconque. On a que $\mathbb{C}[G] \otimes \mathbb{C}[G]$ et que $\mathbb{C}[G \times G]$ sont deux exemples de produit tensoriel pour $\mathbb{C}[G] \times \mathbb{C}[G]$. De plus, on a que

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[G] \otimes \mathbb{C}[G] &\xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[G \times G] \\ (f \otimes h) &\longmapsto F : G \times G \rightarrow \mathbb{C} \\ &(a, b) \mapsto f(a)h(b). \end{aligned}$$

De même, $\underbrace{\mathbb{C}[G] \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}[G]}_{n \text{ fois}}$, que l'on note $\mathbb{C}[G]^{\otimes n}$, est un produit tensoriel de $\underbrace{\mathbb{C}[G] \times \cdots \times \mathbb{C}[G]}_{n \text{ fois}}$. De la même façon que pour le produit de deux espaces, on aura que $\underbrace{\mathbb{C}[G] \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}[G]}_{n \text{ fois}} \cong \mathbb{C}[G^n]$ où

$$\begin{aligned} f_1 \otimes \cdots \otimes f_n &\longmapsto F : G^n \rightarrow \mathbb{C} \\ (a_1, \dots, a_n) &\longmapsto f_1(a_1) \cdots f_n(a_n). \end{aligned}$$

Ces isomorphismes proviennent du fait que l'espace vectoriel constitué de toutes les fonctions $F : G^n \rightarrow \mathbb{C}$ respecte la propriété universelle du produit tensoriel pour des fonctions choisies. Ainsi, en vertu du fait que tous les produits tensoriels sont isomorphes il découle directement que $\mathbb{C}[G]^{\otimes n} \cong \mathbb{C}[G^n]$. La preuve est laissée au lecteur puisqu'elle n'est guère utile pour la suite de l'article.

Les notions présentées antérieurement sont suffisantes pour le besoin de cet article. Toutefois, le lecteur souhaitant une plus grande rigueur de définition est encouragé à consulter des ouvrages sur le calcul tensoriel.

2 Les TQFTs en dimension 2

Les TQFTs de dimension 2 sont souvent utilisées pour introduire ces objets aux novices. Leur particularité est que les espaces géométriques de ces TQFTs se

représentent par des surfaces dans \mathbb{R}^3 . Ainsi, la structure géométrique de ces surfaces sera présentée. Ensuite, les TQFTs de dimension 2 seront concrètement définies. Cela permettra d'introduire la prochaine section qui présentera les axiomes des TQFTs.

2.1 La structure géométrique des surfaces à bords dans \mathbb{R}^3

Avant de présenter les TQFTs, il est important d'aborder le sujet des surfaces et de leur structure, car la compréhension des TQFTs en sera grandement améliorée. Ainsi, les surfaces en jeu sont des variétés de dimension 2 qui peuvent être considérées comme des surfaces avec des composantes de bord de l'espace \mathbb{R}^3 et qui sont appelées des *cobordismes*. Une variété est un objet dont les propriétés locales sont similaires à un ouvert sur un espace euclidien, mais dont les propriétés globales peuvent être différentes. Les composantes de bord d'une surface sont simplement une collection de courbes fermées et lisse de \mathbb{R}^3 qui définissent dans un sens « l'extrémité » de la surface originale. Visuellement, pour les TQFTs de dimension 2, les composantes de bord contenant une seule courbe sont représentées par des cercles. (voir figure 1) Cette visualisation est possible puisque qu'il existe un type de morphisme appelé *difféomorphisme* qui assure que les courbes peuvent être déformées en un cercle. Ensuite, si la composante de bord est une collection de courbes, on la visualisera par un nombre de cercles équivalent au nombre de courbes positionnées de manière à ce qu'ils ne s'intersectent pas et qu'ils ne soient pas les uns dans les autres. Généralement, ils sont alignés sur une même ligne verticale. Le terme « cobordisme » fait alors seulement référence au fait que les surfaces à bords font un lien entre deux composantes de bords d'où l'appellation *cobordisme*. Il est possible qu'une surface ne possède pas de composantes bord. Ces surfaces à bords possèdent un *genre* qui est visualisé par des trous dans la surface pour le cas en dimension 2. Le genre est un invariant pour ce type de surface ce qui sert, par exemple, à déterminer si deux surfaces sont équivalentes par difféomorphisme. Ainsi, pour comparer deux surfaces il est possible de vérifier leur genre ; s'il est différent il est possible de conclure qu'elles ne sont pas équivalentes. Le concept de genre est un concept plus élaboré, mais pour les besoins de cette présentation, il suffit de savoir que le genre est une caractéristique importante de ce type de surface. Finalement, il est possible qu'une surface ne soit pas connexe, c'est-à-dire qu'elle puisse être composée de plusieurs surfaces à bords connexes disjointes. Dans ce cas, cette surface se nomme *l'union disjointe* des cobordismes qui la composent. Il en est de même pour les composantes de bord. Il en découle que toutes les composantes de bords sont générées par l'union disjointe de la composante de bords que l'on illustre par l'ensemble contenant un seul cercle. En voici quelques exemples.



FIGURE 1 : Quelques surfaces à bords

À ces surfaces, il est possible d'ajouter une structure additionnelle pour différencier les composantes de bords et ainsi orienter d'une certaine manière la surface. Ainsi, les composantes de bords d'une surface sont divisées en deux types : les composantes de bords « entrants » et les composantes de bords « sortants ». La convention utilisée dans cet article est de placer les composantes de bords entrants à gauche et les composantes de bords sortants à droite. Il est possible de conceptualiser les surfaces comme des tuyaux transportant de l'eau dont le courant va de gauche à droite. Ainsi, l'eau entre à gauche par les composantes de bords entrants et sort à droite par les composantes de bords sortants. Par exemple, si les composantes de bords entrants sont représentées par un trait rouge et les sortants par un trait noir on a que l'orientation de la convention donne les figures suivantes.

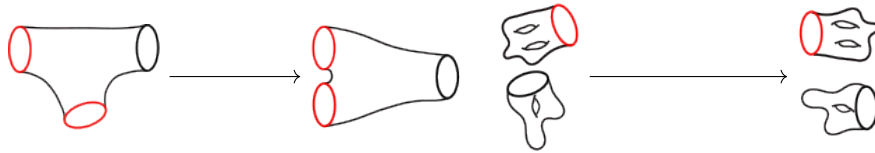


FIGURE 2 : L'orientation conventionnelle des surfaces à bords

Au regard de l'effet de cette convention, il est possible de remarquer qu'une surface est définie principalement par son genre (nombre de trous), son nombre de composantes de bords entrants et son nombre de composantes de bords sortants. Ainsi, une surface peut se déformer en une autre si et seulement si cette nouvelle surface possède le même genre, le même nombre de composantes de bords entrants et le même nombre de composantes de bords sortants. Si cette déformation est possible, il est dit que ces deux surfaces sont *difféomorphes*. Cela permet entre autre de standardiser la notation graphique des cobordismes.

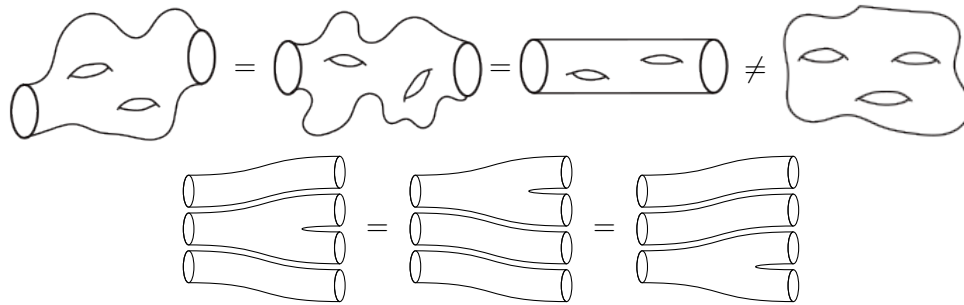


FIGURE 3 : L'équivalence des cobordismes

Pour terminer d'exposer la structure géométrique des cobordismes, il convient de présenter l'opération géométrique qui confère une structure aux cobordismes. Il existe une manière de composer des surfaces pour en obtenir une autre. Ultimement, cela mènera à la présentation des six cobordismes générateurs. Alors, pour composer deux cobordismes, il suffit que le nombre de composantes de bords

sortants du premier cobordisme soit le même que le nombre de composantes de bords entrants du deuxième. Pour reprendre l'analogie avec les tuyaux d'eau, il faut que la juxtaposition de deux pièces de tuyau ne laisse aucune fuite ; le but est que l'eau entre par les composantes de bords entrants du premier cobordisme et sorte uniquement par les composantes de bords sortants du deuxième cobordisme. Voici quelques exemples de compositions correctes et incorrectes de cobordisme.

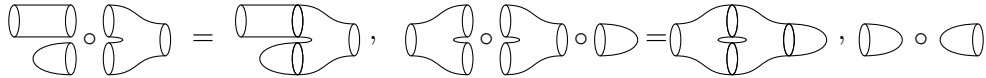


FIGURE 4 : Quelques compositions correctes

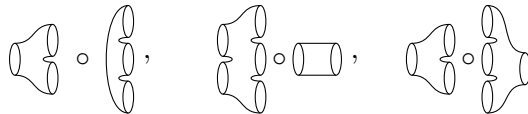
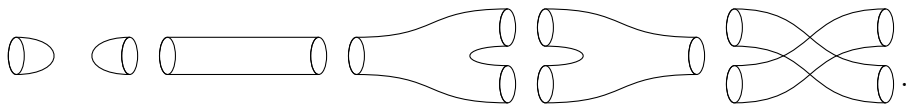


FIGURE 5 : Quelques compositions incorrectes

Finalement, cette règle de collage des cobordismes a pour conséquence que toutes les surfaces à bords se décomposent en une combinaison de six cobordismes en particulier. La preuve sera omise, car elle dépasse le niveau voulu de cet article. Toutefois, il est assez intuitif que ces six cobordismes sont des générateurs, car toutes les relations importantes y sont représentées : la création d'une composante de bords, la fusion de deux composantes de bords en une, la division d'une composante de bords en deux, la destruction d'une composante de bords, l'identité et la permutation de deux composantes de bords. Ils sont représentés graphiquement avec ces cobordismes



Il est important de souligner que la représentation du cobordisme de permutation peut porter à confusion, car graphiquement les deux cylindres semblent s'intersecter, or il n'en est rien. Le lecteur peut s'imaginer que les deux cylindres passent un par dessus l'autre ce qui est possible, car c'est une surface dans l'espace \mathbb{R}^3 . L'impression qu'ils se croisent provient du fait que les surfaces sont dessinées sur un support en deux dimensions.

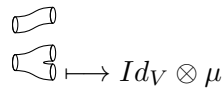
Maintenant que la structure géométrique des cobordismes à bien été expliquée, il est possible de donner la définition concrète des TQFTs de dimension 2.

2.2 La définition des TQFTs de dimension 2

Les TQFTs sont des objets mathématiques dont l'utilité est de représenter une structure géométrique dans un autre contexte mathématique. Dans le cas des

TQFTs de dimension 2, elles représentent la structure géométrique des surfaces à bords, les cobordismes, dans le contexte de l'algèbre linéaire. Ainsi, les TQFTs de cette dimension associent les composantes de bords à des espaces vectoriels précis et les cobordismes à une application linéaire précise entre l'espace vectoriel associé à ses composantes de bords entrant et l'espace vectoriel associé à ses composantes de bords sortant. Un peu comme les homomorphismes de groupes, les TQFTs doivent faire en sorte que la structure des cobordismes soit conservée. Plus précisément, cela se résume à respecter six conditions.

Premièrement, la composante de bords illustrée par un cercle seul, doit être envoyée à un espace vectoriel choisi, par exemple l'espace arbitraire V sur le corps des scalaires \mathbb{k} . Par suite, la composante de bords composée de deux cercles disjoints doit être envoyée au produit tensoriel $V \otimes V$. En généralisant, la condition est que la composante de bords composée de n cercles disjoints doit être envoyée au produit tensoriel de n copies de V avec lui-même ($V^{\otimes n}$). De plus, il faut appliquer cette association pour les composantes de bords entrant et les composantes de bords sortant de manière indépendante. Il est nécessaire de procéder ainsi afin de conserver la relation entre le cobordisme et ses composantes de bords. En outre, il doit aussi en être de même pour les cobordismes. Ainsi, le cobordisme composé de plus d'une surface disjointe doit être envoyé au tenseur formé des applications linéaires associées aux cobordismes qui le forment. Par exemple, il faut avoir que



$$\text{Diagram of pair of pants} \mapsto Id_V \otimes \mu$$

où $\mu : V \rightarrow V \otimes V$.

Deuxièmement, les TQFTs doivent envoyer la composante de bords vide au corps des scalaires de l'espace vectoriel cible. Par exemple, si l'espace vectoriel V est défini sur le corps des nombres réels, alors la composante de bords vide est envoyé à \mathbb{R} .

Troisièmement, comme pour les homomorphismes de groupes, les cobordismes de genre 0 dont le nombre de composantes de bords entrants est identique au nombre de composantes de bords sortants doivent être envoyés à l'application identité entre les espaces vectoriels associés aux composantes de bords. Par exemple, le cobordisme avec quatre composantes de bords de chaque type et de genre 0 doit être envoyé à l'application identité de l'espace $V \otimes V \otimes V \otimes V$. De plus, si le genre est différent de 0, on aura que la surface pourra être décomposée, en appliquant la règle de collage présentée précédemment, en surfaces de genre 0. L'application associée à ce type de surface sera potentiellement différente de l'application identité puisque chaque surface de genre 0 qui la compose sera associée à une application précise et l'application résultante sera la composition de ces fonctions d'où qu'il est possible de ne pas retrouver l'application identité. Finalement, le seul cobordisme qui ne respecte pas cette condition est le cobordisme de permutation, car son rôle est de permuter deux éléments, donc même si c'est une application de $V \otimes V \rightarrow V \otimes V$ il est différent de l'application identité. Le cas de ce cobordisme est le sujet de la sixième condition.

Quatrièmement, deux cobordismes connexes équivalents doivent avoir la même image. Cela est une conséquence de l'équivalence des cobordismes basée sur le nombre de composantes de bords entrant, le nombre de composantes de bords sortant et le genre. Il est logique que cette condition doit être satisfaite, car sinon la structure des surfaces ne serait pas correctement représentée par les TQFTs. À titre d'exemple, il faut que l'image d'une TQFT soit la même pour toutes les surfaces n'étant pas une union disjointe de surfaces ayant trois composantes de bords entrants, deux sortants et un genre de quatre.

Cinquièmement, si un cobordisme se décompose en d'autres, il faut que l'image du premier soit équivalente à la composition des images respectives des cobordismes qui le composaient. Par exemple, si on a les cobordismes suivants et leur image donnée par une TQFT quelconque

$$\begin{array}{ccc} \text{Cobordisme 1} \mapsto f_1 : V \rightarrow V \otimes V & & \text{Cobordisme 2} \mapsto f_2 : V \otimes V \rightarrow V \\ \\ \text{Cobordisme 3} \mapsto f_3 : V \rightarrow V. \end{array}$$

Comme $\text{Cobordisme 1} = \text{Cobordisme 2}$, la condition revient à dire que le diagramme suivant commute, c'est-à-dire que $f_2 \circ f_1 = f_3$.

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{f_1} & V \otimes V & \xrightarrow{f_2} & V \\ & & \searrow f_3 & & \nearrow \\ & & & & \end{array}$$

FIGURE 6 : Diagramme commutatif de la cinquième condition

La dernière condition est que le cobordisme de permutation Cobordisme 4 soit envoyé à une application linéaire de permutation. Très souvent, cette application est l'application canonique de permutation pour le produit tensoriel. Par exemple, l'image de ce cobordisme devrait être l'application suivante si un bord est envoyé à l'espace vectoriel V :

$$\begin{array}{ccc} \text{Cobordisme 4} \mapsto \rho : V \otimes V \rightarrow V \otimes V \\ v \otimes w \mapsto w \otimes v. \end{array}$$

Il est important de remarquer que le choix de l'application linéaire de permutation dépend du contexte. L'objectif étant de représenter la propriété de symétrie des cobordismes, il est possible que l'application linéaire associée au cobordisme de permutation ne soit pas l'application canonique de permutation du produit tensoriel. Dans certains cas, cette application linéaire doit être modifiée pour que la structure induite par la TQFT sur l'espace vectoriel soit commutative. Cela est une conséquence de la cinquième condition et des relations suivantes de la structure des cobordismes.



FIGURE 7 : Relations de « commutativité » et de « co-commutativité »

En somme, toutes les TQFTs de dimension 2 respectent ces conditions. De plus, si une autre règle d'association entre les surfaces à bords et l'algèbre linéaire respecte ces conditions, alors elle est directement une TQFT. La généralisation des cinq premières conditions sont exactement les axiomes donnés par Atiyah pour définir les TQFTs. La sixième condition ne fait pas partie des axiomes, car historiquement il n'était pas possible de concevoir une TQFT qui ne représenterait pas la symétrie des variétés dans un contexte linéaire lorsque les axiomes ont été établis. Toutefois, des contres-exemples ont été trouvés d'où l'importance de ne pas négliger la nécessité d'avoir une application linéaire spécifique associée au cobordisme de permutation. Maintenant que ces conditions ont été établies, il est intéressant de donner leur généralisation qui sont précisément les axiomes définissant les TQFTs.

3 La définition axiomatique des TQFTs

Les principaux changements, en comparaison avec les conditions données pour les TQFTs de dimension 2, sont que les bords sont remplacés par des variétés de dimension $n-1$ et que les cobordismes deviennent des variétés de dimension n . Les variétés sont les généralisations des surfaces à bords et des bords en dimension supérieure. Cependant, le lien entre les deux types de variétés est le même ; les bords des variétés de dimension n sont les variétés de dimension $n-1$. De plus, lorsqu'il est question d'union disjointe il suffit de comprendre que c'est une manière d'unir des variétés en une variété possédant les variétés unies comme composantes disjointes. Par exemple, un bord composé de deux cercles disjoints serait l'union disjointe, notée par \amalg , des deux bords composés de un cercle uniquement. Aussi, il en est de même pour les variétés de dimension n . Alors, ces précisions faites, il est possible de présenter la définition axiomatique des TQFTs.

Une théorie topologique des champs quantiques (TQFT) de dimension n est une règle \mathcal{A} que l'on peut définir en deux parties. La première \mathcal{A}_1 qui associe à chaque variété Σ de dimension $n-1$ (les composantes de bords) un \mathbb{k} -espace vectoriel $\mathcal{A}(\Sigma)$ et la deuxième \mathcal{A}_2 qui associe à chaque variété $M : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ de dimension n (les cobordismes) une application linéaire $\mathcal{A}(M) : \mathcal{A}(\Sigma_1) \rightarrow \mathcal{A}(\Sigma_2)$. Cette règle doit satisfaire les axiomes suivants :

A1 : Deux variétés de dimension n équivalentes doivent avoir la même image :

$$M \cong M' \Rightarrow \mathcal{A}(M) = \mathcal{A}(M').$$

Ici considérons que deux variétés sont équivalentes si elles ont le même nombre de composantes connexes, le même nombre de composantes de

bords entrant, le même nombre de composantes de bords sortant, le même genre, la même décomposition en cobordismes générateurs et s'il existe une application qui satisfait certains critères de continuité (difféomorphisme) qui permet de déformer la première variété en la seconde.

A2 : La variété de dimension n faisant le lien entre deux mêmes variétés de dimension $n-1$ doit être envoyée à l'application linéaire identité.

$$\text{Si } M : \Sigma \rightarrow \Sigma \Rightarrow \mathcal{A}(M) = Id_{\mathcal{A}(\Sigma)}.$$

A3 : Étant donné une décomposition $M = M' \circ M''$, alors on doit avoir

$$\mathcal{A}(M) = \mathcal{A}(M') \circ \mathcal{A}(M'').$$

A4 : L'union disjointe (\amalg) de variétés de dimension $n-1$ (bord) doit être envoyée au produit tensoriel d'espaces vectoriels ; si $\Sigma = \Sigma_1 \amalg \Sigma_2 \Rightarrow \mathcal{A}(\Sigma) = \mathcal{A}(\Sigma_1) \otimes \mathcal{A}(\Sigma_2)$. Pour les cobordismes, il faut qu'ils soient envoyés au produit tensoriel des applications linéaires ; si $M = M' \amalg M'' \Rightarrow \mathcal{A}(M) = \mathcal{A}(M') \otimes \mathcal{A}(M'')$.

A5 : La variété vide de dimension $n-1$ doit être envoyée au corps \mathbb{k} des scalaires de l'espace vectoriel. Il s'en suit que la variété de dimension n faisant le lien entre la surface vide et elle-même doit être envoyée à l'endomorphisme identité dans le corps de scalaire \mathbb{k} .

Pour compléter la définition, il suffit d'ajouter que le cobordisme qui permute ses bords doit être envoyé à une application linéaire qui confère une structure de symétrie à l'espace vectoriel but de la TQFT. En outre, il est possible d'y reconnaître facilement les conditions présentées précédemment lorsque $n = 2$. Pour rendre le concept un peu plus concret, la prochaine section sera dédiée à la présentation d'un exemple de TQFT de dimension 2.

4 Un exemple de TQFT

Avant de passer à la définition explicite de la TQFT en exemple, il convient de présenter l'espace vectoriel cible de cette dernière.

4.1 L'espace vectoriel H

L'espace H est défini comme l'espace de toutes les fonctions $f : G \rightarrow \mathbb{k}$ telles que $f(aga^{-1}) = f(g)$ pour tout $a, g \in G$ où G est un groupe quelconque fini et \mathbb{k} un corps arbitraire. Les fonctions ayant cette propriété sont nommées des *fonctions centrales*. Une conséquence de cette définition est que les fonctions centrales sont constantes pour tous les éléments de G étant en relation où deux éléments, x et y , de G sont en relation s'il existe $a \in G$ tel que $y = axa^{-1}$. Cette relation est une relation d'équivalence nommée la conjugaison ; x et y sont donc des éléments dit « conjugués » l'un de l'autre. Cette relation permet

de partitionner le groupe en classes d'équivalence qui sont composées de tous les éléments conjugués entre eux. Alors, les fonctions centrales ont la propriété d'être constante pour tout les éléments d'une même classe de conjugaison. Ainsi, il est possible de définir mathématiquement l'espace vectoriel H ainsi : $H := \{f : G \rightarrow \mathbb{k} \mid f(aga^{-1}) = f(g) \forall a, g \in G\}$. Finalement, il est possible de générer cet espace vectoriel avec la famille de vecteurs suivante $H = \langle \delta_{c_1}, \delta_{c_2}, \dots, \delta_{c_n} \rangle$ où δ_{c_i} est la fonction définie comme suit et c_i un représentant de sa classe de conjugaison.

Définition 4.1. Soit $g \in G$, on a

$$\delta_{c_i}(g) = \begin{cases} 1 & \text{si } g \text{ est un conjugué de } c_i \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

Il est assez clair que c'est une base de H , puisqu'il est évident que la famille des fonctions δ_c est libre et que toutes les fonctions centrales peuvent être obtenues par une combinaison linéaire de fonctions δ_c . Le choix de cette base pour H est judicieux, car ce n'est pas la base utilisée normalement pour cet espace. La section 4.3 traitera de cette autre choix de base de l'espace H .

4.2 La définition explicite d'une TQFT

Tout d'abord, il convient d'établir qu'il suffit de définir une TQFT sur les six générateurs des surfaces à bords dans \mathbb{R}^3 pour que la définition soit complète. Ceci découle du fait qu'une TQFT doit respecter la propriété de composition de la structure des surfaces. Ainsi, comme les six générateurs sont suffisants pour former toutes les surfaces et que la TQFT impose que la composition de surface soit envoyée à la composition des applications linéaires, il sera possible d'obtenir toutes les applications de toutes les surfaces avec la définition des six générateurs. Alors, pour obtenir l'application associée à une surface quelconque, il suffit de décomposer la surface en générateurs, ensuite, de calculer la composition des applications associées aux générateurs pour obtenir l'application associée à la surface originale. Voici donc, la définition des TQFTs faisant le lien entre les surfaces à bords de genre 0 et les produits tensoriels de l'espace vectoriel H .

'Composantes de Bords' \longrightarrow 'Espaces vectoriels'

$$\begin{aligned} 0 &\longmapsto \mathbb{C} \\ 1 &\longmapsto H \\ 2 &\longmapsto H \otimes H \\ 3 &\longmapsto H \otimes H \otimes H \\ &\vdots \\ n &\longmapsto H^{\otimes n} \end{aligned}$$

Ici, les nombres naturels représentent le nombre de cercles disjoints qui forment une composante de bords entrant ou sortant d'une surface quelconque. Cette

notation est souvent utilisée, car elle est plus simple que des illustrations graphiques de cercles disjoints. Rappelons que cette règle d'association s'applique pour les composantes de bords entrant et les composantes de bords sortant de manière indépendante.

'Cobordismes de genre 0' \longrightarrow 'Applications linéaires'

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \text{---} \circlearrowleft \\ \text{---} \end{array} & \longmapsto \eta : \mathbb{C} \rightarrow H & \begin{array}{c} \text{---} \circlearrowright \\ \text{---} \end{array} & \longmapsto \varepsilon : H \rightarrow \mathbb{C} \\
 \begin{array}{c} \text{---} \circlearrowleft \\ \text{---} \circlearrowleft \\ \text{---} \end{array} & \longmapsto \mu : H \otimes H \rightarrow H & \begin{array}{c} \text{---} \circlearrowright \\ \text{---} \circlearrowright \\ \text{---} \end{array} & \longmapsto \Delta : H \rightarrow H \otimes H \\
 \begin{array}{c} \text{---} \circlearrowleft \\ \text{---} \circlearrowleft \\ \text{---} \circlearrowleft \\ \text{---} \end{array} & \longmapsto \text{Id}_H : H \rightarrow H & \begin{array}{c} \text{---} \circlearrowleft \\ \text{---} \circlearrowright \\ \text{---} \circlearrowleft \\ \text{---} \circlearrowright \end{array} & \longmapsto \rho : H \otimes H \rightarrow H \otimes H
 \end{array}$$

Les définitions des applications linéaires $\eta, \varepsilon, \mu, \Delta, \text{Id}_H$ et de ρ sont

$$\begin{aligned}
 \eta : \mathbb{k} &\longrightarrow H \\
 r &\longmapsto r\delta_e
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon : H &\longrightarrow \mathbb{k} \\
 f &\longmapsto f(e)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mu : H \otimes H &\longrightarrow H \\
 F &\longmapsto \tilde{f}
 \end{aligned}$$

$$\text{où } \tilde{f} : G \longrightarrow \mathbb{k}$$

$$g \longmapsto \sum_{ab=g} F(a,b)$$

$$\begin{aligned}
 \Delta : H &\longrightarrow H \otimes H \\
 f &\longmapsto F
 \end{aligned}$$

$$\text{où } F : G \times G \longrightarrow \mathbb{k}$$

$$(g_1, g_2) \longmapsto \sum_{ab=g_2} \sum_c \frac{1}{|c^{-1}|} \delta_c(g_1) \delta_{c^{-1}}(a) f(b)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Id}_H : H &\longrightarrow H \\
 f &\longmapsto f
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \rho : H \otimes H &\longrightarrow H \otimes H \\
 F(a,b) &\longmapsto F(b,a)
 \end{aligned}$$

où e est l'élément neutre du groupe G , c est le représentant de sa classe de conjugaison et $|c|$ est le cardinal de la classe dont c est le représentant. De la

même manière, c^{-1} est le représentant de la classe de conjugaison contenant l'inverse de l'élément c . De plus, les sommes indexées par $ab = g$ signifie qu'il faut additionner pour tout les couples d'éléments de G dont le produit donne l'élément g . La somme indexée par c signifie qu'il faut faire la somme pour toutes les classes de conjugaison de G . De plus, il est naturel d'ajouter que l'union disjointe de cobordismes générateurs sera envoyée au produit tensoriel de leur application respective. Ainsi, avec cette précision, il devient évident que les quatre premières conditions sont respectées par cette TQFT de même que la condition sur l'application de permutation. Pour confirmer que la condition sur la composition de cobordismes soit envoyée à la composition des applications linéaires, il faudrait avoir l'expression générale. Toutefois, cette expression était un peu trop complexe pour le niveau souhaité de cet article. Cependant, la vérification de ces conditions a été faite dans le cadre de mon stage, ce qui me permet d'affirmer que cette condition est bien respectée. Ainsi, cet exemple est une TQFT bien définie. L'étude du cas particulier de cette TQFT permettra de mettre encore plus en évidence l'effet du genre des surfaces à bords sur une TQFT de dimension 2.

4.3 Un résultat original

Maintenant que la TQFT a été présentée, il est possible de revenir sur les avantages de choisir les fonctions δ pour former la base de l'espace H . Une courte mise en contexte sur la théorie des représentations linéaires des groupes finis sera donnée pour bien mettre en valeur l'utilité de ce choix de base.

Dans la littérature sur les TQFTs de dimension 2, l'espace vectoriel des fonctions centrales est défini en utilisant la théorie des représentations linéaires des groupes finis. La notion centrale de cette théorie est qu'il est possible de trouver des homomorphismes entre un groupe et le groupe général linéaire $GL_n(\mathbb{C})$ des matrices de dimension n à coefficients dans \mathbb{C} . Ces homomorphismes de groupes nommés *représentations* permettent de représenter les éléments du groupe source par des matrices qui elles-mêmes peuvent être interprétées comme des endomorphismes sur un espace vectoriel quelconque. Le groupe est donc représenté dans un contexte d'algèbre linéaire. De plus, une représentation dite *irréductible* signifie que l'espace vectoriel V de la représentation n'est pas l'espace trivial et qu'il n'existe pas de représentation pour un sous-espace vectoriel de V . Finalement, le caractère d'une représentation est la fonction qui associe à chaque élément du groupe un nombre complexe correspondant à la trace de la matrice associée à l'élément par la représentation.

Ainsi, la base donnée habituellement pour l'espace H est composée des caractères des représentations irréductibles du groupe qui forment une base orthogonale. Par conséquent, toute la TQFT était définie en utilisant cette théorie et les propriétés qui en sont rattachées ; il était donc nécessaire de connaître la théorie des représentations linéaires des groupes finis pour la comprendre. La force de la base de H formée par les fonctions δ est qu'il n'est plus nécessaire de connaître la théorie des représentations linéaires des groupes finis pour comprendre, premièrement, l'espace H et, deuxièmement, la TQFT. En outre, toute

la TQFT est simplifiée, car elle n'utilise aucune propriété provenant de la théorie des représentations linéaires des groupes finis ; elle se restreint à des sommes et au comportement des fonctions δ qui est beaucoup plus simple que celui des caractères des représentations irréductibles. Aussi, la définition des δ est plus explicite que celle des caractères qui est beaucoup plus difficile à trouver. Un autre avantage des fonctions δ est que la TQFT n'est plus restreinte au corps de scalaires \mathbb{C} . Lorsque définie avec les caractères, il était nécessaire que le corps de nombre soit celui des complexes, car c'est une obligation dans la théorie des représentations linéaires des groupes finis que le corps utilisé soit \mathbb{C} . Finalement, cette définition plus simple de l'espace H rendant la TQFT plus simple aussi et libre pour le choix du corps de scalaires est un résultat obtenu au cours de mon stage.

4.4 Un cas particulier

Lorsque le groupe G est commutatif, il y a pour conséquence que l'espace H devient l'espace de toutes les fonctions possibles de G au corps \mathbb{C} . Il est même possible d'être plus général et de considérer des fonctions ayant pour codomaine un corps quelconque \mathbb{k} . Cet espace est noté par $\mathbb{k}[G]$ pour le différencier de H qui n'impose pas que le groupe soit abélien. Toutes les fonctions sont centrales pour un groupe abélien puisque tous les éléments sont seuls dans leur classe de conjugaison, d'où que $\mathbb{k}[G]$ est l'espace de toutes les fonctions de G dans \mathbb{k} . Ainsi, la dimension de l'espace $\mathbb{k}[G]$ est égale au nombre d'éléments dans le groupe. Ce cas particulier est intéressant, car il permet d'observer directement et concrètement l'effet du genre (nombre de trous). On voit qu'un facteur de $|G|^k$, où k est le genre, apparaît dans les expressions lorsqu'on les compare à celle obtenues pour l'espace H . Avant d'introduire les expressions, rappelons que les éléments de $\mathbb{k}[G] \otimes \mathbb{k}[G]$ peuvent être considérés comme des fonctions $G \times G \rightarrow \mathbb{k}$ où \times est le produit cartésien habituel d'ensemble. Ainsi, pour les cobordismes générateurs de genre k , on obtient les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \eta : \mathbb{k} &\longrightarrow \mathbb{k}[G] \\ r &\longmapsto r|G|^k \delta_e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon : \mathbb{k}[G] &\longrightarrow \mathbb{k} \\ f &\longmapsto |G|^k f(e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu : \mathbb{k}[G] \otimes \mathbb{k}[G] &\longrightarrow \mathbb{k}[G] \\ F &\longmapsto \tilde{f} \\ \text{où } \tilde{f} : G &\longrightarrow \mathbb{k} \\ g &\longmapsto |G|^k \sum_{\substack{\forall (a,b) \in G^2 \\ ab=g}} F(a,b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta : \mathbb{k}[G] &\longrightarrow \mathbb{k}[G] \otimes \mathbb{k}[G] \\ f &\longmapsto F \\ \text{où } F : G \times G &\longrightarrow \mathbb{k} \\ (a,b) &\longmapsto |G|^k f(ab)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Id_{\mathbb{k}[G]} : \mathbb{k}[G] &\longrightarrow \mathbb{k}[G] \\ f &\longmapsto |G|^k f\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho : \mathbb{k}[G] \otimes \mathbb{k}[G] &\longrightarrow \mathbb{k}[G] \otimes \mathbb{k}[G] \\ F(a,b) &\longmapsto F(b,a).\end{aligned}$$

Dans ces expressions, on a que e désigne l'élément neutre de G et que l'opération entre deux éléments de G est représentée par la concaténation. De plus, il est possible d'obtenir une expression générale relativement simple où il est encore possible d'observer l'effet du genre.

$$\begin{aligned}\begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}} \\ \vdots \\ \boxed{\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}} \end{array} \begin{array}{c} n \\ \vdots \\ m \end{array} \longmapsto Gen : \mathbb{k}[G]^{\otimes n} &\longrightarrow \mathbb{k}[G]^{\otimes m} \\ F &\longmapsto \tilde{F} \\ \text{où } \tilde{F} : G^m &\longrightarrow \mathbb{k} \\ (g_1, \dots, g_m) &\longmapsto |G|^k \sum_{\substack{\forall (a_1, \dots, a_n) \in G^n \\ a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n = g_1 g_2 \cdots g_{m-1} g_m}} F(a_1, \dots, a_n)\end{aligned}$$

Ces expressions sont les résultats que j'ai obtenus au cours de mon stage d'été en recherche. J'ai pu facilement prouver que la TQFT de ce cas respectait les conditions présentées précédemment. Ces expressions ont été calculées assez tôt lors de mon stage, car ce cas est simple et il est possible d'obtenir une expression générale facilement. En outre, l'effet du genre est visible et facilement calculable. La TQFT permet de représenter le genre de la surface ce qui est intéressant, car c'est un invariant à ce type d'espaces géométriques. Il est bon de rappeler que les TQFTs sont utilisées pour ce but précis qui est de trouver des invariants.

5 Pour aller plus loin...

Ici, des informations complémentaires pour le lecteur souhaitant en apprendre d'avantage sur le sujet seront présentées. En premier lieu, la structure induite par les TQFTs de dimension 2 sur l'espace vectoriel associé à la composante de bords constituée d'une seule composante connexe sera exposée. Ensuite, de brèves précisions sur l'interprétation des TQFTs selon la théorie des catégories seront données. Finalement, si le lecteur souhaite encore plus de détails, il est invité à consulter le livre de Kock *Frobenius Algebras and 2D topological quantum field theories* [Koc04].

Au regard de l'exemple, il est possible de remarquer que la TQFT confère à l'espace vectoriel associé à la composante de bords constituée d'une composante connexe une structure algébrique particulière nommée *algèbre de Frobenius*. En effet, l'image du cobordisme avec deux composantes de bords entrant et une de type sortant est appelé *produit* et confère une structure d'algèbre pour l'espace vectoriel associé à la composante de bords composée d'une seule composante connexe. Ensuite, celle du cobordisme faisant le lien entre la composante de bords seule et la composante de bords vide, la *counité*, est ce qui se nomme la forme de Frobenius. Ainsi, la mise en commun de ces deux applications induit une structure d'algèbre de Frobenius sur l'espace vectoriel associé à la composante de bords formée d'une composante connexe. En d'autres termes, l'espace vectoriel $\mathbb{k}[G]$ accompagné par les applications linéaires $\mu : \mathbb{k}[G] \otimes \mathbb{k}[G] \rightarrow \mathbb{k}[G]$ et $\varepsilon : \mathbb{k}[G] \rightarrow \mathbb{k}$ a la structure d'une algèbre de Frobenius commutative. Dans les faits, il existe un théorème établissant une équivalence canonique entre les TQFTs de dimension 2 et les algèbres de Frobenius commutatives. La principale conséquence est la possibilité de comprendre des variétés qui sont des objets d'une certaine complexité en étudiant les algèbres de Frobenius qui sont, quant à elles, beaucoup plus connues et comprises. Alors, il faut en retenir que les TQFTs sont des règles de correspondances qui simplifient d'une certaine manière une structure géométrique. En ce sens, il est même possible de simplifier l'expression des TQFTs.

Les TQFTs sont le plus souvent exprimées dans les termes de la théorie des catégories, car les axiomes définissent une règle d'association propre à cette branche des mathématiques appelée *foncteur*. Un foncteur est une correspondance entre deux objets mathématiques appelés des *catégories*. Il y a donc un lien très étroit entre la théorie des catégories et les théories topologiques des champs quantiques. Dans le contexte présent, les catégories utilisées étaient la catégorie des cobordismes et celle des espaces vectoriels. En outre, les cobordismes présentés étaient de dimension 2, or il existe une catégorie et des TQFTs pour chaque dimension de cobordisme. De plus, les axiomes donnés pour définir une TQFT définissent précisément un foncteur monoïdal et symétrique. Sans entrer dans les détails, il est possible de remarquer que cette façon de définir une TQFT n'impose pas de restriction sur la catégorie but, la catégorie source étant toujours celle des cobordismes. D'ailleurs, trouver de nouvelles catégories buts pour lesquelles il existe un foncteur monoïdal et symétrique (TQFTs) entre elles et la catégorie des cobordismes est un sujet de recherche encore actif présentement. Considérant la puissance des théories topologiques des champs quantiques, il est naturel de vouloir étendre l'utilisation de cet outil à d'autres disciplines.

6 Conclusion

En somme, il a été montré que les théories topologiques des champs quantiques de dimension 2 sont des règles d'association entre les surfaces à bords appelées

des variétés de dimension 2 et les espaces vectoriels. En outre, les conditions à respecter en dimension 2 pour être une TQFT peuvent être généralisées en axiomes qui se traduisent par un foncteur symétrique et monoïdal au sens de la théorie des catégories. De plus, l'exemple de TQFT en dimension 2 qui a été présenté a permis de démontrer la simplicité d'une TQFT en dimension 2 ainsi que l'effet du genre sur les expressions lorsque le groupe est abélien. En dernier lieu, les liens des TQFTs avec les algèbres de Frobenius et la théorie des catégories ont été montrés.

L'intérêt pour les TQFTs est encore bien vivant dans la recherche en mathématiques. Beaucoup de découvertes sont à venir notamment par son implication dans les sciences quantiques. La simplicité que confère une TQFT à un problème complexe ne sera certainement pas négligeable pour les découvertes à venir.

Références

[Ati88] Michael ATIYAH : Topological quantum field theories. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 68:175–186, 1988. http://www.numdam.org/item/PMIHES_1988__68__175_0/.

[Koc04] Joachim KOCK : *Frobenius Algebras and 2D Topological Quantum Field Theories*. Numéro 59 de London Mathematical Society Student Texts. Cambridge university press, New York, 2004. ISBN 978-0-521-54031-5.

Zoïk DUBOIS

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Courriel: Zoik.dubois@USherbrooke.ca

Classification des extensions centrales de groupes finis

Cloé Allard

Reçu le 2024-09-11 et accepté le 2025-05-20

RÉSUMÉ Dans cet article on étudie les extensions centrales de groupe en utilisant une approche par les 2-cocycles. On introduit donc les différents concepts qui aideront à définir ce qu'est une extension centrale et un 2-cocycle et comment ceux-ci pourront nous fournir toute l'information nécessaire afin d'être capable d'identifier les classes d'isomorphisme des extensions. On terminera en calculant tous les 2-cocycles dans une classe d'exemples concrets.

1 Introduction

La première théorie de la cohomologie est apparue en 1935 dans un article de JW Alexander [Cor], sur les complexes différentiels et leurs duals. Les origines de la théorie de la cohomologie se trouvent dans la topologie et l'algèbre au début du siècle dernier, mais depuis, elle est devenue un outil important dans presque toutes les branches des mathématiques. Depuis 1935 la théorie de la cohomologie s'est grandement développée. Elle a principalement été étudiée en utilisant les notions de la théorie des catégories. La théorie des catégories étant cependant un sujet normalement abordée lors de cours de cycles supérieurs (maîtrises et doctorats), nous essaierons dans les prochains chapitres d'utiliser principalement les notions enseignées au premier cycle (baccalauréat) afin d'étudier la cohomologie de groupes ainsi que les extensions centrales de groupes. Ces deux sujets semblent indépendants l'un de l'autre, or dans cet article nous montrerons qu'il existe une équivalence entre les extensions centrales de groupes et la cohomologie de groupes.

2 Cohomologie d'un groupe G

Il est à noter que tout au long de cette section nous utiliserons le terme cocycle pour parler de 2-cocycles. De plus G et A seront des groupes et leurs opérations respectives seront notées multiplicativement avec la condition que A soit abélien.

Définition 2.1. Soit une fonction $f : G \times G \rightarrow A$ telle que pour $g, h, k \in G$, $f(h, k)f(g, hk) = f(gh, k)f(g, h)$. On dit alors que f est un cocycle.

Je tiens à remercier professeure Emily Cliff pour son soutien et son encadrement tout au long de mon stage de recherche avec elle ainsi que lors de la rédaction de cet article.

Définition 2.2. Soit un cocycle $f : G \times G \rightarrow A$ tel que pour $g \in G$, $f(g, 1_G) = 1_A$. On dit alors que f est un cocycle normalisé.

Lemme 2.3. Soit un cocycle normalisé $f : G \times G \rightarrow A$. On a alors que pour $g \in G$, $f(1_G, g) = 1_A$.

Démonstration. Soit $g \in G$, prenons le triplet $(g, 1_G, g)$. Comme f est un cocycle on a que $f(1_G, g)f(g, g) = f(g, g)f(g, 1_G)$. Or, comme f est un cocycle normalisé on a que $f(g, 1_G) = 1_A$. On obtient donc que $f(1_G, g) = 1_A$. \square

Proposition 2.4. Soit $\phi : G \rightarrow A$ tel que $\phi(1_G) = 1_A$. On définit $d\phi : G \times G \rightarrow A$ par $d\phi(g, h) := \frac{\phi(g)\phi(h)}{\phi(gh)}$. Alors $d\phi$ est un cocycle normalisé.

Démonstration. Vérifions que cette fonction respecte la condition pour être un cocycle. On observe que

$$d\phi(h, k)d\phi(g, hk) = \frac{\phi(h)\phi(k)}{\phi(hk)} \frac{\phi(g)\phi(hk)}{\phi(ghk)} = \phi(h)\phi(k) \frac{\phi(g)}{\phi(ghk)}.$$

Par contre on a aussi que

$$d\phi(g, h)d\phi(gh, k) = \frac{\phi(g)\phi(h)}{\phi(gh)} \frac{\phi(gh)\phi(k)}{\phi(ghk)} = \phi(h)\phi(k) \frac{\phi(g)}{\phi(ghk)}$$

et donc $d\phi(h, k)d\phi(g, hk) = d\phi(g, h)d\phi(gh, k)$. Nous pouvons ainsi conclure que $d\phi$ est un cocycle.

Vérifions ensuite qu'il s'agit d'un cocycle normalisé. On calcule facilement que

$$d\phi(1_G, h) = \frac{\phi(1_G)\phi(h)}{\phi(1_G \cdot h)} = 1_A \frac{\phi(h)}{\phi(h)} = 1_A.$$

Il suit que $d\phi$ est un cocycle normalisé. \square

Définition 2.5. On dit qu'un cocycle $f : G \times G \rightarrow A$ est trivial si et seulement si $f(g, h) = 1_A$ pour chaque $g, h \in G$.

Proposition 2.6. La fonction $d\phi$ définie à la proposition précédente est triviale si et seulement si ϕ est un homomorphisme.

Démonstration. La fonction est triviale si et seulement si $d\phi(g, h) = 1_A \forall g, h \in G$, on a alors que $\frac{\phi(g)\phi(h)}{\phi(gh)} = 1_A \forall g, h \in G$, ce qui est équivalent à la condition $\phi(g)\phi(h) = \phi(gh) \forall g, h \in G$. Et donc, $d\phi$ est triviale si et seulement si ϕ est un homomorphisme. \square

Notation. Dans cet article la notation \mathbb{Z}_k est utilisée pour représenter le groupe des entiers modulo k .

Exemple 2.7. Soit G le groupe additif \mathbb{Z}_n et A le groupe additif \mathbb{Z}_m . On a que $d\phi = 0$ si et seulement si $\phi(g+n\mathbb{Z}) + \phi(h+n\mathbb{Z}) + m\mathbb{Z} = \phi(g+h+n\mathbb{Z}) + m\mathbb{Z} \forall g, h \in G$, c'est-à-dire si ϕ est un homomorphisme.

Définition 2.8. L'ensemble des applications $\phi : G \rightarrow A$ tel que $\phi(1_G) = 1_A$ est noté $C^1(G,A)$. Il forme un groupe abélien sous la multiplication induite par la multiplication dans A : Pour ϕ, ψ dans $C^1(G,A)$, on a $(\phi\psi)(g) = \phi(g)\psi(g)$.

Définition 2.9. L'ensemble des fonctions $\phi : G \rightarrow A$ tel que ϕ est un homomorphisme forme un sous-groupe de $C^1(G,A)$ noté $Z^1(G,A)$.

Définition 2.10. L'ensemble des cocycles normalisés $f : G \times G \rightarrow A$ forme un groupe abélien noté $Z^2(G,A)$. Encore une fois, la multiplication est induite par la multiplication dans A .

Définition 2.11. L'ensemble des cocycles normalisés qui s'écrivent de la forme $d\phi$ forme un sous-groupe de $Z^2(G,A)$ noté $B^2(G,A)$. Les éléments de $B^2(G,A)$ sont appelés les cobords.

Définition 2.12. On définit la cohomologie de G avec coefficients dans A en degré 2 par $H^2(G,A) = Z^2(G,A)/B^2(G,A)$.

3 Les suites exactes courtes de groupes

Définition 3.1. Soit G un groupe. Le centre de G est

$$Z(G) = \{ z \in G \mid gz = zg \quad \forall g \in G \}.$$

Proposition 3.2. Le centre $Z(G)$ est un sous-groupe normal de G : $Z(G) \trianglelefteq G$.

Démonstration. Posons e_G l'élément neutre de G . Soit g un élément de G . On a $e_G g = g = g e_G$ et donc $e_G \in Z(G)$. Il suit que $Z(G)$ est non vide.

Soient $a, b \in Z(G)$. On veut montrer que $ab \in Z(G)$. Pour $g \in G$ on a $(ab)g = a(bg) = a(gb) = (ag)b = g(ab)$, et ainsi $ab \in Z(G)$.

Soit $a \in Z(G)$. On veut montrer que $a^{-1} \in Z(G)$. Pour $g \in G$ on a $g^{-1} \in G$ et donc $g^{-1}a = ag^{-1}$. Il suit que $a^{-1}g = a^{-1}(g^{-1})^{-1} = (g^{-1}a)^{-1} = (ag^{-1})^{-1} = (g^{-1})^{-1}a^{-1} = ga^{-1}$. Donc $a^{-1} \in Z(G)$ comme désiré. Il suit que $Z(G)$ est un sous-groupe de G .

Il nous reste à démontrer qu'il est normal. Alors prenons $a \in Z(G)$ et $g \in G$, on observe que $gag^{-1} = gg^{-1}a = a \in Z(G)$. Ainsi, $gag^{-1} \in Z(G)$. \square

Définition 3.3. Soient G, H, K et L des groupes et f_i , pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, des homomorphismes comme suit :

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f_1} & H \\ \downarrow f_3 & & \downarrow f_2 \\ K & \xrightarrow{f_4} & L. \end{array}$$

On dit que le diagramme est commutatif si et seulement si $f_2 \circ f_1 = f_4 \circ f_3$.

Exemple 3.4. Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & G \times G \\ \downarrow id & & \downarrow m \\ G & \xrightarrow{id} & G, \end{array}$$

avec $f : G \rightarrow G \times G$ tel que $f(g) = (1_G, g)$ et $m : G \times G \rightarrow G$ tel que $m(g, h) = gh$, la fonction de multiplication. On a effectivement que $f \circ m = id \circ id = id$.

Exemple 3.5. L'associativité peut être écrite sous la forme d'un diagramme commutatif. Soit m la fonction de multiplication et id la fonction identité. On considère le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} G \times G \times G & \xrightarrow{m \times id} & G \times G \\ \downarrow id \times m & & \downarrow m \\ G \times G & \xrightarrow{m} & G. \end{array}$$

On a alors $(m \times id)(g, h, k) = (gh, k)$ et $(id \times m)(g, h, k) = (g, hk)$. Le diagramme est commutatif si et seulement si

$$(m \circ (m \times id))(g, h, k) = (m \circ (id \times m))(g, h, k) \forall g, h, k \in G,$$

c'est à dire si et seulement si $(gh)k = g(hk)$. Mais cela est la définition de l'associativité.

Définition 3.6. Soient G, H et K des groupes. Une suite exacte courte de groupes est une suite d'homomorphismes de la forme

$$1 \longrightarrow G \xrightarrow{\phi} H \xrightarrow{\psi} K \longrightarrow 1$$

telle que

1. ϕ est injective ;
2. ψ est surjective ;
3. $Im(\phi) = Ker(\psi)$.

On utilise parfois la notation \hookrightarrow pour représenter une fonction injective et \twoheadrightarrow pour représenter une fonction surjective. On peut donc représenter la suite exacte courte avec le diagramme suivant

$$1 \longrightarrow G \hookrightarrow H \twoheadrightarrow K \longrightarrow 1.$$

Lemme 3.7. Soit la suite exacte courte suivante

$$1 \longrightarrow G \xrightarrow{\phi} H \xrightarrow{\psi} K \longrightarrow 1.$$

Alors $\psi \circ \phi = 1$ où 1 est la fonction qui envoie n'importe quel élément de G à 1_K .

Démonstration. Soit $g \in G$. Alors $\phi(g) \in \text{Im}(\phi) = \text{Ker}(\psi)$ et donc $\psi(\phi(g)) = 1_K$. \square

Exemple 3.8. La suite

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

avec

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{Z}_2 &\rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \\ a &\mapsto (0, a) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 &\rightarrow \mathbb{Z}_2 \\ (b, a) &\mapsto b \end{aligned}$$

est une suite exacte courte.

4 Les extensions

Définition 4.1. Soit la suite exacte courte de groupes

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1.$$

On dit que E est une extension de G par N .

De plus, considérons le cas où $N = A$ est abélien. Si $i(A) \subseteq Z(E)$ où $Z(E)$ est le centre de E , alors on dit que E est une extension centrale.

Objectif. On essaie donc de classifier les extensions centrales de G par A .

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1$$

à isomorphisme près.

On définira bientôt la notion d'isomorphisme d'extensions, mais d'abord donnons quelques exemples d'extensions centrales.

Exemple 4.2. Soit la suite exacte courte de groupes

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{i} A \times G \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1$$

où A est un groupe abélien. L'homomorphisme $i : A \rightarrow A \times G$ est tel que $i(a) = (a, 1_G)$ et l'homomorphisme $\pi : A \times G \rightarrow G$ est tel que $\pi(a, g) = g$.

De plus, $i(A)$ est tout les éléments de $A \times G$ de la forme $(a, 1_G)$ où $a \in A$.

Calculons maintenant le centre $Z(A \times G)$. Soit $(a, g), (b, h) \in A \times G$. On a que $(a, g)(b, h) = (ab, gh)$ et $(b, h)(a, g) = (ba, hg)$. Comme A est abélien on sait que $(ba, hg) = (ab, hg)$. Ainsi $(a, g) \in Z(A \times G)$ si et seulement si $gh = hg$ pour tout $h \in G$. C'est à dire si et seulement si $g \in Z(G)$. On peut donc conclure que $Z(A \times G) = A \times Z(G)$. Il suit que $i(A) \subseteq Z(A \times G)$. On a ainsi que $A \times G$ est une extension centrale de G par A . On l'appelle l'extension triviale.

Exemple 4.3. Soit la suite exacte courte de groupes

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{i} \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

où $i : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_4$ est tel que $i(a + 2\mathbb{Z}) = 2(a + 4\mathbb{Z})$ et $\pi : \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ est tel que $\pi(n + 4\mathbb{Z}) = n + 2\mathbb{Z}$.

Le groupe \mathbb{Z}_2 est un groupe abélien. De plus, $i(A) = \{4\mathbb{Z}, 2+4\mathbb{Z}\}$ et $Z(\mathbb{Z}_4) = \mathbb{Z}_4$ car il s'agit d'un groupe abélien. Il en suit que $i(A) \subset Z(\mathbb{Z}_4)$. On peut donc conclure que \mathbb{Z}_4 est une extension centrale de \mathbb{Z}_2 par \mathbb{Z}_2 .

Définition 4.4. Un isomorphisme d'extensions E, E' est un isomorphisme $\phi : E \rightarrow E'$ de groupes tel que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & E & \xrightarrow{\pi} & G & \longrightarrow & 1 \\ & & \parallel & & \downarrow \phi & & \parallel & & \\ 1 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i'} & E' & \xrightarrow{\pi'} & G & \longrightarrow & 1. \end{array}$$

On a donc

1. $\phi \circ i = i'$;
2. $\pi' \circ \phi = \pi$.

Proposition 4.5 (Court lemme des cinq). *Soient les deux suites exactes courtes suivantes*

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & G & \xrightarrow{\phi} & H & \xrightarrow{\psi} & K & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\ 1 & \longrightarrow & G' & \xrightarrow{\phi'} & H' & \xrightarrow{\psi'} & K' & \longrightarrow & 1, \end{array}$$

où α, β, γ sont des homomorphismes tels que le diagramme est commutatif.
Si α et γ sont des isomorphismes alors β l'est aussi.

Démonstration. Démontrons d'abord que β est surjectif. Soient $h' \in H'$ et $k' = \psi'(h') \in K'$. Comme γ est surjectif,

$$\exists k \in K \text{ tel que } \gamma(k) = k' = \psi'(h'). \quad (1)$$

De plus, comme il s'agit d'une suite exacte courte, ψ est surjectif. Donc

$$\exists h \in H \text{ tel que } \psi(h) = k. \quad (2)$$

Par la commutativité du diagramme on sait que $\gamma(\psi(h)) = \psi'(\beta(h))$. Or, par l'équation (2) on a que $\gamma(\psi(h)) = \gamma(k)$ et par l'équation (1) on a que $\gamma(k) = \psi'(h')$.

En appliquant ψ' à $\beta(h)(h')^{-1}$ on obtient

$$\begin{aligned} \psi'(\beta(h)(h')^{-1}) &= \psi'(\beta(h))\psi'(h')^{-1} = \gamma(\psi(h))\psi'(h')^{-1} \\ &= \gamma(k)\psi'(h')^{-1} = \psi'(h')\psi'(h')^{-1} = 1_{K'}. \end{aligned}$$

C'est-à-dire que $\beta(h)(h')^{-1} \in \text{Ker}(\psi) = \text{Im}(\phi')$. Or, on peut écrire $\text{Im}(\phi')$ comme $\phi'(G') = \phi'(\alpha(G))$ car α est un isomorphisme.

Donc $\beta(h)(h')^{-1} \in \phi'(\alpha(G))$, Alors il existe $g \in G$ tel que

$$\phi'(\alpha(g)) = \beta(h)(h')^{-1}. \quad (3)$$

Par la commutativité du diagramme on sait que $\phi' \circ \alpha = \beta \circ \phi$, et donc

$$\phi'(\alpha(g)) = \beta(\phi(g)). \quad (4)$$

Par les équations (3) et (4) on sait que

$$\begin{aligned} \beta(h)(h')^{-1} = \beta(\phi(g)) &\Leftrightarrow h' = \beta(h)\left(\beta(\phi(g))\right)^{-1} \\ &\Leftrightarrow h' = \beta(h\phi(g)^{-1}). \end{aligned}$$

Il suit que β est surjectif, comme désiré.

Maintenant démontrons que β est injectif. Soit $h \in H$ tel que $\beta(h) = 1_{H'}$. Comme ψ' est un homomorphisme, $\psi'(\beta(h)) = 1_{K'}$. Or, par la commutativité du diagramme on sait que $\psi' \circ \beta = \gamma \circ \psi$, et donc $\gamma(\psi(h)) = 1_{K'}$. Comme γ est injective, il suit que $\psi(h) = 1_K$, et donc $h \in \text{Ker}(\psi)$.

Comme $\text{Ker}(\psi) = \text{Im}(\phi)$,

$$\exists g \in G \text{ tel que } \phi(g) = h. \quad (5)$$

1. σ est bijective ;

2. σ est un homomorphisme si et seulement si s est un homomorphisme.

Démonstration.

(1)

Démontrons d'abord que σ est injectif. Soient $(a_1, g_1), (a_2, g_2) \in A \times G$ tels que $\sigma(a_1, g_1) = \sigma(a_2, g_2)$. C'est-à-dire que $i(a_1)s(g_1) = i(a_2)s(g_2)$. Appliquons π ; on obtient : $\pi(i(a_1)s(g_1)) = \pi(i(a_2)s(g_2))$. Comme $\text{Ker}(\pi) = \text{Im}(i)$ et π est un homomorphisme, c'est équivalent à $\pi(s(g_1)) = \pi(s(g_2))$. Mais $\pi \circ s = \text{id}_G$, alors l'équation devient $g_1 = g_2$.

Notre équation originale devient donc $i(a_1)s(g_1) = i(a_2)s(g_1)$, ce qui implique que $i(a_1) = i(a_2)$. Finalement $a_1 = a_2$ car i est injectif. On a donc que $\sigma(a_1, g_1) = \sigma(a_2, g_2)$ si et seulement si $(a_1, g_1) = (a_2, g_2)$, c'est-à-dire que σ est injectif.

Démontrons maintenant que σ est surjectif. Soit $e \in E$, et posons $g = \pi(e)$. On a ainsi que $s(g) = s(\pi(e))$. On observe que $\pi(e \cdot s(\pi(e))^{-1}) = \pi(e) \cdot (\pi \circ s \circ \pi(e))^{-1}$ car π est un homomorphisme. Mais comme $\pi \circ s = \text{id}_G$, on a $\pi(e) \cdot (\pi \circ s \circ \pi(e))^{-1} = \pi(e) \cdot (\pi(e))^{-1} = 1_G$. Alors $e \cdot s(\pi(e))^{-1} \in \text{Ker}(\pi) = \text{Im}(i)$. Donc, il existe $a \in A$ tel que $e \cdot s(\pi(e))^{-1} = i(a)$. Finalement, on voit que $e = i(a)s(\pi(e)) = i(a)s(g) = \sigma(a, g)$, et donc σ est surjectif.

(2)

L'application σ est un homomorphisme si et seulement si

$$\sigma((a_1, g_1) \cdot (a_2, g_2)) = \sigma(a_1, g_1)\sigma(a_2, g_2) \text{ pour tous } (a_i, g_i) \in A \times G.$$

On observe que

$$\sigma((a_1, g_1) \cdot (a_2, g_2)) = i(a_1 a_2)s(g_1 g_2) = i(a_1)i(a_2)s(g_1 g_2)$$

car i est un homomorphisme, tandis que

$$\sigma(a_1, g_1)\sigma(a_2, g_2) = i(a_1)s(g_1)i(a_2)s(g_2) = i(a_1)i(a_2)s(g_1)s(g_2)$$

car E est une extension centrale.

Donc $\sigma((a_1, g_1) \cdot (a_2, g_2)) = \sigma(a_1, g_1)\sigma(a_2, g_2)$ si et seulement si $s(g_1 g_2) = s(g_1)s(g_2)$. On conclut que σ est un homomorphisme si et seulement si s l'est. \square

Théorème 5.3. *Soit*

$$1 \longrightarrow A \xleftarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1$$

une suite exacte courte donnant une extension centrale. L'extension centrale E est isomorphe à l'extension triviale $(A \times G)$ si et seulement s'il existe un homomorphisme $s : G \rightarrow E$ tel que $\pi \circ s = id_G$. On dit alors que s est une section de π .

Démonstration.

Supposons qu'on a une section $s : G \rightarrow E$. De la proposition 5.2(2) on sait que la fonction $\sigma : A \times G \rightarrow E$, $\sigma(a, g) = i(a)s(g)$ est un homomorphisme. On sait également de la proposition 5.2(1) que σ est bijective. On a ainsi que σ est un isomorphisme et donc que $E \cong A \times G$.

Supposons maintenant qu'on a un isomorphisme $\phi : A \times G \rightarrow E$ d'extensions, correspondant au diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 1 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & E & \xrightarrow{\pi} & G & \longrightarrow & 1 \\
 & & \parallel & & \uparrow \phi & \swarrow s & \parallel & & \\
 1 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i'} & A \times G & \xrightarrow{\pi'} & G & \longrightarrow & 1 \\
 & & & & & \swarrow j & & &
 \end{array}$$

Si on pose $j : G \rightarrow A \times G$, $j(g) = (1_A, g)$, on peut définir un homomorphisme $s = \phi \circ j : G \rightarrow E$. Par la commutativité du diagramme, on sait que $\pi \circ s = \pi \circ \phi \circ j = \pi' \circ j = id_G$. Donc s est une section comme désiré. \square

Note. En général on veut savoir à quelle "distance" s est d'être un homomorphisme. Pour se faire, on veut comparer $s(g)s(h)$ et $s(gh)$. En appliquant π , on a

$$s(g)s(h) \mapsto \pi(s(g)s(h)) = \pi(s(g))\pi(s(h)) = gh \quad (6)$$

et

$$s(gh) \mapsto \pi(s(gh)) = gh. \quad (7)$$

Par les équations (6) et (7) on peut conclure que $s(g)s(h)s(gh)^{-1} \in Ker(\pi) = Im(i)$. Comme i est injectif, il existe un unique élément $a \in A$ tel que $i(a) = s(g)s(h)s(gh)^{-1}$.

Posons $f(g, h) := a$, on obtient une unique fonction $f : G \times G \rightarrow A$ tel que $s(g)s(h) = i(f(g, h))s(gh)$.

Proposition 5.4. *La fonction $f : G \times G \rightarrow A$ telle que $s(g)s(h) = i(f(g, h))s(gh)$ est triviale si et seulement si s est un homomorphisme.*

Démonstration. La fonction f est triviale, c'est-à-dire $f(g, h) = 1_A$, si et seulement si $i(f(g, h)) = 1_E$, ce qui est équivalent à $s(gh) = s(g)s(h)$. On conclut que f est triviale si et seulement si s est un homomorphisme comme désiré. \square

Lemme 5.5. *La fonction f de la proposition 5.4 est un cocycle normalisé.*

Démonstration. Tout d'abord on observe que

$$i(f(h, k)f(g, hk)) = i(f(h, k))i(f(g, hk)) = s(h)s(k)s(hk)^{-1}s(g)s(hk)s(ghk)^{-1}.$$

Le produit des trois premiers termes étant dans le centre de E , nous obtenons l'égalité

$$i(f(h,k)f(g,hk)) = s(g)s(h)s(k)s(hk)^{-1}s(hk)s(ghk)^{-1} = s(g)s(h)s(k)s(ghk)^{-1}.$$

D'un autre côté nous observons que

$$i(f(g,h)f(gh,k)) = i(f(g,h))i(f(gh,k)) = s(g)s(h)s(gh)^{-1}s(gh)s(k)s(ghk)^{-1}.$$

En simplifiant l'équation nous obtenons

$$i(f(g,h)f(gh,k)) = s(g)s(h)s(k)s(ghk)^{-1}.$$

On a donc que $i(f(h,k)f(g,hk)) = i(f(g,h)f(gh,k))$. Comme i est injectif, la condition pour être un cocycle est respectée.

Vérifions maintenant s'il est normalisé. On remarque que $i(f(1_G, h)) = s(1_G)s(h)s(1_G \cdot h)^{-1} = 1_E \cdot s(h)s(h)^{-1} = 1_E = i(1_A)$. L'injectivité de i implique que $f(1_G, h) = 1_A$.

On peut ainsi conclure que cette fonction f est un cocycle normalisé. \square

On verra maintenant que la fonction f contient l'information nécessaire pour construire une nouvelle opération notée $*_f$ sur $A \times G$ telle que $(A \times G, *_f)$ est une extension centrale de G par A , et la bijection σ de la proposition 5.2 est un isomorphisme d'extensions.

Définition 5.6. Soit une fonction $f : G \times G \rightarrow A$. On définit l'opération $*_f$ sur $A \times G$ par $(a, g) *_f (b, h) := (abf(g, h), gh)$.

Proposition 5.7. Soit $f : G \times G \rightarrow A$ un cocycle normalisé. L'ensemble $A \times G$ muni de l'opération $*_f$ forme un groupe.

Démonstration. Vérifions que le groupe admet un élément neutre.

$$\begin{aligned} (1_A, 1_G) *_f (b, h) &= (1_A b f(1_G, h), 1_G h) = (b, h); \\ (a, g) *_f (1_A, 1_G) &= (a 1_A f(g, 1_G), g 1_G) = (a, g). \end{aligned}$$

Le groupe admet donc l'élément $(1_A, 1_G)$ comme élément neutre.

Vérifions maintenant que l'associativité est respectée. Pour $(a, g), (b, h), (c, k) \in A \times G$ on a

$$(a, g) *_f ((b, h) *_f (c, k)) = (a, g) *_f (bcf(h, k), hk) = (abcf(h, k)f(g, hk), ghk).$$

Pareillement on obtient

$$\begin{aligned} ((a, g) *_f (b, h)) *_f (c, k) &= (abf(g, h), gh) *_f (c, k) = (abf(g, h)cf(gh, k), ghk) \\ &= (abcf(g, h)f(gh, k), ghk). \end{aligned}$$

Comme f est un cocycle, $(abcf(h,k)f(g,hk),ghk) = (abcf(g,h)f(gh,k),ghk)$; ainsi l'associativité est respectée comme désirée.

Vérifions finalement que chaque élément admet un inverse.

$$\begin{aligned} (a,g) *_f (b,h) = (1_A, 1_G) &\Leftrightarrow (abf(g,h), gh) = (1_A, 1_G) \\ &\Leftrightarrow abf(g,h) = 1_A \quad \& \quad gh = 1_G \\ &\Leftrightarrow b = a^{-1}f(g,h)^{-1} \quad \& \quad h = g^{-1} \\ &\Leftrightarrow b = a^{-1}f(g, g^{-1})^{-1} \quad \& \quad h = g^{-1}. \end{aligned}$$

Vérifions que $(b,h) = (a^{-1}f(g, g^{-1})^{-1}, g^{-1})$ est bel et bien un inverse.

$$\begin{aligned} (a^{-1}f(g, g^{-1})^{-1}, g^{-1}) *_f (a,g) &= (aa^{-1}f(g, g^{-1})^{-1}f(g^{-1}, g), g^{-1}g) \\ &= (f(g, g^{-1})^{-1}f(g^{-1}, g), 1_G). \end{aligned}$$

Or, en utilisant la condition d'un cocycle avec les éléments (g, g^{-1}, g) on obtient $f(g^{-1}, g)f(g, g^{-1}g) = f(g, g^{-1})f(gg^{-1}, g)$ d'où $f(g^{-1}, g) = f(g, g^{-1})$.

On a donc effectivement que $(a,g)^{-1} = (a^{-1}f(g^{-1}, g), g^{-1})$.

On peut donc conclure que $(A \times G, *_f)$ est un groupe. \square

On remarque ainsi que chaque cocycle f mène à une extension $(A \times G, *_f)$.

Proposition 5.8. *Soit $f : G \times G \rightarrow A$ un cocycle normalisé. Le groupe $A \times G$ muni de l'opération $*_f$ a la structure d'une extension centrale.*

Démonstration. Considérons les fonctions suivantes

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{i} A \times G \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1.$$

avec

$$\begin{aligned} i : A &\rightarrow A \times G & \pi : A \times G &\rightarrow G \\ a &\mapsto (a, 1_G) & (a, g) &\mapsto g. \end{aligned}$$

Il faut donc démontrer que i et π sont des homomorphismes, que i est injective, que π est surjective, que $\text{Ker}(\pi) = \text{Im}(i)$ et que $i(A) \subseteq Z(A \times G, *_f)$.

Commençons par montrer que i et π sont des homomorphismes. On a que $i(a_1) *_f i(a_2) = (a_1, 1_G) *_f (a_2, 1_G) = (a_1a_2f(1_G, 1_G), 1_G1_G) = (a_1a_2, 1_G) = i(a_1a_2)$. On peut donc conclure que i est un homomorphisme. Regardons maintenant la fonction π . On a que $\pi((a_1, g_1) *_f (a_2, g_2)) = \pi(a_1a_2f(g_1, g_2), g_1g_2) = g_1g_2 = \pi(a_1, g_1)\pi(a_2, g_2)$. Il en suit que π est également un homomorphisme.

De plus, il est trivial par la définition de i que cette fonction est injective. Il est également trivial par la définition de π que cette fonction est surjective. On a en plus que $\text{Ker}(\pi) = \{(a, 1_G) | a \in A\} = \text{Im}(i)$.

Finalement, il faut vérifier que $i(A) \subseteq Z(A \times G, *_f)$. Prenons $(a, 1_G) \in i(A)$ et $(b, g) \in A \times G$. On a $(a, 1_G) *_f (b, g) = (abf(1_G, g), 1_Gg) = (ab, g)$ et $(b, g) *_f (a, 1_G) = (baf(g, 1_G), g1_G) = (ba, g) = (ab, g)$.

On peut donc finalement conclure que le groupe $A \times G$ muni de l'opération $*_f$ a la structure d'une extension centrale. \square

Note 5.9. La discussion ci-dessus nous donne comme résultat qu'avec une extension E donnée et une fonction s choisie, on obtient un cocycle f . On peut ainsi conclure que chaque extension donne un cocycle f . De même, chaque cocycle donne une extension. On aimerait maintenant savoir quand deux telles extensions sont isomorphes.

Proposition 5.10. *Soit $f_1, f_2 : G \times G \rightarrow A$ des cocycles normalisés menant aux groupes $(A \times G, *_f_i), i = 1, 2$. Supposons qu'on a un isomorphisme des extensions centrales.*

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i_1} & (A \times G, *_f_1) & \xrightarrow{\pi_1} & G \longrightarrow 1 \\ & & \parallel & & \downarrow \tilde{\phi} & & \parallel \\ 1 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i_2} & (A \times G, *_f_2) & \xrightarrow{\pi_2} & G \longrightarrow 1. \end{array}$$

Il suit que $\tilde{\phi}$ est de la forme $\tilde{\phi}(a, g) = (a\phi(g), g)$, où $\phi : G \rightarrow A$ est tel que $\frac{f_2(g, h)}{f_1(g, h)} = \frac{\phi(g)\phi(h)}{\phi(gh)}$. Par contre, chaque fonction $\phi : G \rightarrow A$ satisfaisant $\frac{f_2(g, h)}{f_1(g, h)} = \frac{\phi(g)\phi(h)}{\phi(gh)}$ nous donne un isomorphisme $\tilde{\phi}$ d'extensions.

Démonstration. Notons $\tilde{\phi}(a, g) = (\tilde{\phi}_A(a, g), \tilde{\phi}_G(a, g))$. On sait par la commutativité du diagramme que $\pi_2 \circ \tilde{\phi} = \pi_1$. On doit donc avoir que

$$\pi_2(\tilde{\phi}(a, g)) = \tilde{\phi}_G(a, g) = \pi_1(a, g) = g.$$

On conclut donc que $\tilde{\phi}_G(a, g) = g$, et ce, pour tout $(a, g) \in A \times G$.

De plus, on sait que $\tilde{\phi} \circ i_1 = i_2$. On doit donc avoir

$$\tilde{\phi}(i_1(a)) = \tilde{\phi}(a, 1_G) = (\tilde{\phi}_A(a, 1_G), 1_G) = i_2(a) = (a, 1_G).$$

On a ainsi que $\tilde{\phi}_A(a, 1_G) = a$ et ce, pour tout $a \in A$.

En sachant que $\tilde{\phi}$ est un homomorphisme de groupes, on doit avoir

$$\tilde{\phi}((a_1, g_1) *_f_1 (a_2, g_2)) = \tilde{\phi}(a_1, g_1) *_f_2 \tilde{\phi}(a_2, g_2).$$

En particulier, il faut

$$\tilde{\phi}((a, 1_G) *_f_1 (1_A, g)) = \tilde{\phi}(a1_Af_1(1_G, g), 1_Gg) = \tilde{\phi}(a, g) = (\tilde{\phi}_A(a, g), g).$$

Cependant,

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(a, 1_G) *_f_2 \tilde{\phi}(1_A, g) &= (\tilde{\phi}_A(a, 1_G), 1_G) *_f_2 (\tilde{\phi}_A(1_A, g), g) \\ &= (a, 1_G) *_f_2 (\tilde{\phi}_A(1_A, g), g) \\ &= (a\tilde{\phi}_A(1_A, g)f_2(1_G, g), 1_Gg) \\ &= (a\tilde{\phi}_A(1_A, g), g). \end{aligned}$$

On conclut donc que $\tilde{\phi}_A(a,g) = a\tilde{\phi}_A(1_A,g)$ et ce, pour tout $g \in G$ et $a \in A$.
Donc en posant

$$\begin{aligned}\phi : G &\rightarrow A \\ g &\mapsto \tilde{\phi}_A(1_A,g),\end{aligned}$$

on a $\tilde{\phi}(a,g) = (a\phi(g),g)$ et ce, pour tout $(a,g) \in A \times G$.

Finalement, on doit avoir que $\tilde{\phi}_A((1_A,g) *_{f_1} (1_A,h)) = \tilde{\phi}_A(1_A,g) *_{f_2} \tilde{\phi}_A(1_A,h)$.
D'un côté on obtient

$$\tilde{\phi}_A((1_A,g) *_{f_1} (1_A,h)) = \tilde{\phi}_A(f_1(g,h),gh) = (f_1(g,h)\phi(gh),gh).$$

Et de l'autre côté on obtient

$$\tilde{\phi}_A(1_A,g) *_{f_2} \tilde{\phi}_A(1_A,h) = (\phi(g),g) *_{f_2} (\phi(h),h) = (\phi(g)\phi(h)f_2(g,h),gh).$$

On obtient ainsi $f_1(g,h)\phi(gh) = \phi(g)\phi(h)f_2(g,h)$, c'est à dire que

$$\frac{f_1(g,h)}{f_2(g,h)} = \frac{\phi(g)\phi(h)}{\phi(gh)}. \quad (8)$$

À l'opposé, si nous avons une fonction $\phi : G \rightarrow A$ satisfaisant la relation (8), alors on pose

$$\begin{aligned}\tilde{\phi} : A \times G &\rightarrow A \times G \\ (a,g) &\mapsto (a\phi(g),g).\end{aligned}$$

Il restera donc à vérifier les conditions suivantes

1. $\tilde{\phi} \circ i_1 = i_2$
2. $\pi_2 \circ \tilde{\phi} = \pi_1$
3. $\tilde{\phi}((a_1,g_1) *_{f_1} (a_2,g_2)) = \tilde{\phi}(a_1,g_1) *_{f_2} \tilde{\phi}(a_2,g_2)$

afin de s'assurer que la fonction $\tilde{\phi}$ définie nous donne un isomorphisme d'extensions. \square

Remarque 5.11. On peut donc en tirer la conclusion que deux cocycles f_1 et f_2 donnent des extensions isomorphes si et seulement si $\frac{f_1}{f_2} = d\phi$ avec $d\phi$ le cobord défini à la proposition 2.4. Dans un groupe additif on écrira donc que $f_1 - f_2 = d\phi$.

Remarque 5.12. On obtient alors une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphismes des extensions et l'ensemble $H^2(G,A)$. En effet, on sait du théorème 5.3 et du lemme 5.5 qu'à partir d'une extension centrale E il est possible d'obtenir un cocycle noté f_E . À partir de ce cocycle on obtient l'extension centrale $A \times G$ munie de l'opération $*_{f_E}$ comme démontré à la proposition 5.8. Il ne reste qu'à vérifier que celle-ci est isomorphe à E . La définition 5.1 nous affirme qu'il

est toujours possible de définir une fonction $s : G \rightarrow E$ telle que $\pi \circ s = id_G$. Il faudra donc montrer que cette fonction s est un homomorphisme. Or on a que la fonction σ définie à la proposition 5.2 est un homomorphisme. En effet,

$$\sigma((a, g) *_{f_E} (b, h)) = (abf_E(g, h), gh) = i(abf_E(g, h))s(gh).$$

Or, i est un homomorphisme, on obtient donc

$$\sigma((a, g) *_{f_E} (b, h)) = i(a)i(b)i(f_E(g, h))s(gh).$$

Suite au théorème 5.3, on sait que $s(g)s(h) = i(f_E(g, h))s(gh)$. Ainsi on a

$$\sigma((a, g) *_{f_E} (b, h)) = i(a)i(b)s(g)s(h) = i(a)s(g)i(b)s(h) = \sigma(a, g)\sigma(b, h)$$

car on sait que $i(A) \subset Z(E)$. Ainsi on peut conclure que σ est un homomorphisme et par la proposition 5.2.2 il en suit que s est un homomorphisme. Nous pouvons ainsi appliquer le théorème 5.3 et conclure que l'extension centrale E est isomorphe à l'extension $A \times G$ munie de l'opération $*_{f_E}$.

En fait, il y a une structure de groupe sur les classes d'extensions qui fait que cette bijection est un isomorphisme de groupes, mais les détails vont au delà des notions abordées dans cet article.

6 La cohomologie des groupes cycliques

Dans cette section, pour la simplicité, on travaille avec les groupes $A = \mathbb{Z}_m$ et $G = \mathbb{Z}_n$. Nous travaillerons donc avec des suites exactes courtes de la forme suivante :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_m \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_n \longrightarrow 0.$$

Proposition 6.1. *Soit τ le plus grand commun diviseur de m et n . Il existe τ choix d'homomorphismes $\phi : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_m$.*

Démonstration. Notons par \bar{k} la classe de $k \in \mathbb{Z}$ dans \mathbb{Z}_n . Comme $\bar{1}$ est le générateur de \mathbb{Z}_n , le choix de $\phi(\bar{1}) = a \in \mathbb{Z}_m$ détermine toutes les valeurs de ϕ . Considérons a comme entier entre 0 et $m-1$, et voyons quels choix de a donnent des homomorphismes ϕ .

Comme $\phi(0) = \phi(n \times \bar{1}) = n \times a$, on a que $na \equiv 0 \pmod{m}$. Il suit qu'il existe $b \in \mathbb{N}$ tel que $na = mb$, et donc $\frac{n}{\tau}a = \frac{m}{\tau}b$. Comme $\frac{n}{\tau}$ et $\frac{m}{\tau}$ sont copremiers, on voit que $\frac{m}{\tau}$ divise a et donc qu'il existe un $j \in \{0, 1, \dots, \tau-1\}$ tel que $a = j\frac{m}{\tau}$. Il y a donc τ possibilités de choix pour a . \square

Proposition 6.2. *Soit τ le plus grand commun diviseur de m et n . Alors la cardinalité de $B^2(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m)$ est donnée par*

$$|B^2(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m)| = \frac{m^{n-1}}{\tau}.$$

Démonstration. Soit $\delta : C^1(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \rightarrow B^2(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m)$ l'homomorphisme $\delta(\phi) = d\phi$. Cette fonction est surjective par définition de $B^2(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m)$. Selon le premier théorème d'isomorphisme on a que $B^2(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \cong C^1(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m)/\ker(\delta)$. On a donc que $|B^2(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m)| = |C^1(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m)|/|\ker\delta|$, et il nous reste à compter les éléments de $C^1(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m)$ et de $\ker\delta$.

Premièrement, on voit que $\ker\delta = \{\phi : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_m \mid d\phi = 0\} = Z^1(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m)$. La proposition 6.1 nous permet de conclure que $|Z^1(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m)| = \tau$.

Finalement, les éléments de $C^1(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m)$ sont des fonctions $\phi : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_m$ avec $\phi(0) = 0$. Pour chacun des $n - 1$ éléments non nuls de \mathbb{Z}_n , on a un choix pour son image sous ϕ dans \mathbb{Z}_m . Il suit que $|C^1(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m)| = m^{n-1}$. \square

Objectif. Notre but est de construire explicitement chaque extension, à isomorphisme près. On voit qu'il suffit de donner un représentant $f \in Z^2(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m)$ de chaque élément de $Z^2(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m)/B^2(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m)$; l'extension correspondante serait $(A \times G, *_f)$.

Lemme 6.3. *Soit $f : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_m$, un cocycle normalisé, alors $f(i, 1) = f(1, i)$ pour tout $i \in \mathbb{Z}_n$.*

Remarque . Parce qu'on utilise la notation additive, la condition de normalisation nous donne que $f(i, 0) = 0_{\mathbb{Z}_m}$, mais nous dit rien au sujet de $f(i, 1)$.

Démonstration. Pour $i = 1$ on a bien sûr que $f(1, 1) = f(1, 1)$. Supposons que l'égalité est vraie pour un $i \geq 1$ et montrons qu'elle est également vraie pour $i + 1$. En prenant le triplet $(1, i, 1)$ la définition du cocycle nous donne l'égalité $f(i, 1) + f(1, i + 1) = f(i + 1, 1) + f(1, i)$. Or, comme $f(i, 1) = f(1, i)$, il en suit que $f(i + 1, 1) = f(1, i + 1)$. On peut donc conclure que $f(i, 1) = f(1, i)$ pour tout $i \in \mathbb{Z}_n$. \square

Proposition 6.4. *Chaque cocycle normalisé f est déterminé par ses valeurs $f(1, k) \in \mathbb{Z}_m, 0 \leq k \leq n$. Plus précisément, pour $i, j \in \{0, \dots, n - 1\}$ on a*

$$f(i, j) = \sum_{k=i}^{i+j-1} f(1, k) - \sum_{k=1}^{j-1} f(1, k). \quad (9)$$

Démonstration. Démontrons cette proposition par une double récurrence.

Commençons avec le cas $i = 1$. On a $f(1, j) = \sum_{k=1}^j f(1, k) - \sum_{k=1}^{j-1} f(1, k)$ par définition, pour chaque $j \in \mathbb{Z}_n$.

Supposons que le résultat est vrai pour $i \geq 1$ et pour chaque $j \geq 1$. On veut démontrer que c'est aussi vrai pour $i + 1$ et pour chaque j . On fera donc une récurrence sur j .

Si $j = 1$, le côté droit de (8) devient $\sum_{k=i+1}^{i+1} f(1, k) = f(1, i + 1)$. On sait que $f(1, i + 1) = f(i + 1, 1)$ selon le lemme 6.3. On voit donc que la formule est vraie pour $(i + 1, 1)$. Supposons que c'est vrai pour $(i + 1, j)$; on va le montrer pour $(i + 1, j + 1)$.

En vérifiant la condition pour être un cocycle avec les éléments $(i + 1, j, 1)$, on obtient $f(j,1) + f(i + 1, j + 1) = f(i + j + 1, 1) + f(i + 1, j)$. En utilisant nos hypothèses on obtient

$$\begin{aligned}
f(i + 1, j + 1) &= f(i + 1, j) + f(i + j + 1, 1) - f(j, 1) \\
&= \left(\sum_{k=i+1}^{i+j} f(1, k) - \sum_{k=1}^{j-1} f(1, k) \right) + \left(\sum_{k=i+j+1}^{i+j+1} f(1, k) - \sum_{k=1}^0 f(1, k) \right) \\
&\quad - \left(\sum_{k=j}^j f(1, k) - \sum_{k=1}^0 f(1, k) \right) \\
&= \sum_{k=i+1}^{i+j} f(1, k) - \sum_{k=1}^{j-1} f(1, k) + \sum_{k=i+j+1}^{i+j+1} f(1, k) - \sum_{k=j}^j f(1, k) \\
&= \sum_{k=i+1}^{i+j+1} f(1, k) - \sum_{k=1}^j f(1, k).
\end{aligned}$$

On peut conclure que $f(i, j) = \sum_{k=i}^{i+j-1} f(1, k) - \sum_{k=1}^{j-1} f(1, k)$. \square

Lemme 6.5. Si $i + j \geq n$, on obtient $f(i, j) = \sum_{k=i}^{n-1} f(1, k) - \sum_{k=i+j-n}^{j-1} f(1, k)$.

Démonstration. On obtient

$$\begin{aligned}
f(i, j) &= \sum_{k=i}^{i+j-1} f(1, k) - \sum_{k=1}^{j-1} f(1, k) \\
&= \sum_{k=i}^{n-1} f(1, k) + \sum_{k=n}^{i+j-1} f(1, k) - \sum_{k=1}^{j-1} f(1, k) \\
&= \sum_{k=i}^{n-1} f(1, k) + \sum_{k=1}^{i+j-n-1} f(1, k) - \sum_{k=1}^{j-1} f(1, k) \\
&= \sum_{k=i}^{n-1} f(1, k) - \sum_{k=i+j-n}^{j-1} f(1, k).
\end{aligned}$$

\square

Voici une réciproque de la proposition 6.4.

Proposition 6.6. Étant donnée une liste de valeurs $f(1, k), k \geq 1$, la formule (8) définit toujours un cocycle normalisé.

Démonstration. Avant de commencer, définissons une notation qui sera utilisée lors de la démonstration. Soient $g + n\mathbb{Z}, h + n\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}_n$ avec $g, h \in \{0, \dots, n-1\}$; on note

$$\lfloor g + h \rfloor = \begin{cases} g + h & \text{si } g + h < n \\ g + h - n & \text{si } g + h \geq n. \end{cases}$$

On a tout d'abord besoin de démontrer la condition de cocycle pour $g + n\mathbb{Z}, h + n\mathbb{Z}, k + n\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}_n$.

D'un côté,

$$\begin{aligned} f(h,k) + f(g,h+k) &= \sum_{l=h}^{[h+k-1]} f(1,l) - \sum_{l=1}^{k-1} f(1,l) + \sum_{l=g}^{[g+h+k-1]} f(1,l) - \sum_{l=1}^{[h+k-1]} f(1,l) \\ &= \sum_{l=g}^{[g+h+k-1]} f(1,l) - \sum_{l=1}^{k-1} f(1,l) - \sum_{l=1}^{h-1} f(1,l). \end{aligned}$$

De l'autre côté ,

$$\begin{aligned} f(g+h,k) + f(g,h) &= \sum_{l=g}^{[g+h-1]} f(1,l) - \sum_{l=1}^{h-1} f(1,l) + \sum_{l=[g+h]}^{[g+h+k-1]} f(1,l) - \sum_{l=1}^{k-1} f(1,l) \\ &= \sum_{l=g}^{[g+h+k-1]} f(1,l) - \sum_{l=1}^{h-1} f(1,l) - \sum_{l=1}^{k-1} f(1,l). \end{aligned}$$

On observe que $f(h,k) + f(g,h+k) = f(g+h,k) + f(g,h)$ comme désiré.

Vérifions maintenant la condition de normalisation.

$$f(0,j) = \sum_{k=0}^{j-1} f(1,k) - \sum_{k=1}^{j-1} f(1,k) = f(1,0) = \sum_{k=1}^0 f(1,k) - \sum_{k=1}^{-1} f(1,k) = 0.$$

On peut donc conclure qu'étant donnée une liste de valeurs $f(1,k), k \geq 1$, la formule (8) définit toujours un cocycle normalisé comme désiré. \square

Proposition 6.7. *La cardinalité du groupe $Z^2(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m)$ est m^{n-1} .*

$$|Z^2(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m)| = m^{n-1}.$$

Démonstration. On a démontré précédemment qu'il est possible d'exprimer tout cocycle en spécifiant les valeurs $f(1,k) \in \mathbb{Z}_m$ pour $k = 1, \dots, n-1$. Le nombre de cocycles différents dépend donc des différentes combinaisons de $f(1,k)$ possibles. Chaque $f(1,k)$ a m valeurs possibles. On a ainsi m^{n-1} cocycles différents. \square

Proposition 6.8. *La cardinalité du groupe $H^2(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m)$ est le plus grand commun diviseur de m et n noté τ .*

$$|H^2(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m)| = \tau.$$

Démonstration. On sait que

$$|H^2(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m)| = |Z^2(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m)| / |B^2(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m)| = \frac{m^{n-1}}{\frac{m^{n-1}}{\tau}} = \tau,$$

par les propositions 6.2 et 6.8. \square

Proposition 6.9. Soit $a \in \mathbb{Z}_m$. Définissons $f_a : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_m$ par

$$f_a(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i + j < n \\ a & \text{si } i + j \geq n \end{cases} \quad \text{pour } (i + n\mathbb{Z}, j + n\mathbb{Z}) \text{ avec } i, j \in \{0, \dots, n-1\}.$$

Alors f_a est un cocycle normalisé.

Démonstration. Avant de commencer, définissons une notation qui sera utilisée lors de la démonstration. Soit $g + n\mathbb{Z}, h + n\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}_n$, on note $\overline{g+h}$ le résultat de l'addition dans \mathbb{Z}_n . Ainsi, $\overline{g+h} = g + h + n\mathbb{Z}$. Commençons maintenant la démonstration.

On démontre que la condition de cocycle est vérifiée pour chaque triplet (g, h, k) , avec $g, h, k \in \{0, \dots, n-1\}$. On considère quatre cas différents selon les valeurs de $h+k$ et $g+h$.

- **cas 1 : $h+k \geq n$ et $g+h < n$.** On a d'un côté

$$f(h,k) + f(g, \overline{h+k}) = a + 0 = a.$$

En effet, $f(h,k) = a$, car $h+k \geq n$. De plus, comme $g+h < n$ et que $\overline{h+k} < h$ car $h+k > n$, on peut conclure que $g + \overline{h+k} < n$ ce qui nous confirme que $f(g, \overline{h+k}) = 0$.

De l'autre côté,

$$f(\overline{g+h}, k) + f(g, h) = a + 0 = a.$$

En effet, $f(g, h) = 0$, car $g+h < n$. De plus, comme $g+h < n$ alors $\overline{g+h} = g+h$. Ainsi, comme $k \geq 0$ on a que $\overline{g+h+k} = g+h+k \geq h+k \geq n$, ce qui nous confirme que $f(\overline{g+h}, k) = a$.

On a donc $f(h,k) + f(g, \overline{h+k}) = f(\overline{g+h}, k) + f(g, h)$.

- **cas 2 : $h+k < n$ et $g+h \geq n$.** La preuve sera la même que pour le cas 1.

- **cas 3 : $h+k < n$ et $g+h < n$.** On a d'un côté

$$f(h,k) + f(g, \overline{h+k}) = 0 + f(g, \overline{h+k}).$$

De l'autre côté on obtient

$$f(\overline{g+h}, k) + f(g, h) = f(\overline{g+h}, k) + 0.$$

Comme $h+k < n$, $\overline{h+k} = h+k$. Ainsi, $g + \overline{h+k} = g+h+k$. Par le même argument, $\overline{g+h+k} = g+h+k$. On a donc que $f(g, \overline{h+k}) = f(\overline{g+h}, k)$. On obtient donc la confirmation que $f(h,k) + f(g, \overline{h+k}) = f(\overline{g+h}, k) + f(g, h)$.

- **cas 4 : $h + k > n$ et $g + h > n$.** On a d'un côté

$$f(h,k) + f(g, \overline{h+k}) = a + f(g, \overline{h+k}).$$

De l'autre côté on a

$$f(\overline{g+h}, k) + f(g, h) = f(\overline{g+h}, k) + a.$$

Comme $h + k > n$ on a que $g + \overline{h+k} = g + h + k - n$. Par le même argument on a que $\overline{g+h} + k = g + h - n + k = g + h + k - n$ car l'addition est commutative dans \mathbb{Z}_n . Ainsi, on a $f(g, \overline{h+k}) = f(\overline{g+h}, k)$, ce qui nous permet de conclure que $f(h,k) + f(g, \overline{h+k}) = f(\overline{g+h}, k) + f(g, h)$.

On a donc effectivement que f_a est un cocycle et il est clair que celui-ci est normalisé. \square

Remarque 6.10. Soit f_a et $f_b : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_m$ définies comme dans la proposition 6.10. On observe que

$$f_a(i,j) - f_b(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i + j < n \\ a - b & \text{si } i + j \geq n \end{cases} = f_{a-b}(i,j).$$

Note. On a donc défini une collection de cocycles $\{f_a\}$ déterminant des extensions centrales de \mathbb{Z}_n par \mathbb{Z}_m . On veut savoir quand deux de ces cocycles déterminent la même extension, à isomorphisme près. C'est-à-dire, on veut savoir quand $f_a - f_b = f_{a-b}$ est un élément de $B^2(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m)$.

Théorème 6.11. *Le cocycle $f_a - f_b = f_{a-b}$ est un cobord si et seulement si $a - b$ est divisible par τ , le plus grand commun diviseur de m et n .*

Démonstration. Supposons que $f_a - f_b$ est un cobord. Alors il existe $\phi : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_m$ tel que $f_{a-b} = d\phi$. En particulier, si $i + j < n$, $\phi(i)\phi(j) = \phi(i+j)$.

Supposons que $\phi(1) = \alpha$. On a alors que $\phi(2) = \phi(1) + \phi(1) = \alpha + \alpha = 2\alpha$ (si $n > 2$). On utilise la même logique pour tout les éléments de \mathbb{Z}_n jusqu'à $\phi(n-1) = (n-1)\alpha$.

Maintenant, si $i + j \geq n$, on a que $\phi(i) + \phi(j) - \phi(\overline{i+j}) = \phi(i) + \phi(j) - \phi(i+j-n) = a - b$. Il faut donc que $i\alpha + j\alpha - (i+j-n)\alpha = a - b$. En simplifiant cette équation, on obtient $n\alpha = a - b \pmod{m}$.

Cela implique qu'il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que $n\alpha = a - b + mk$ et donc que $a - b = n\alpha + ml$ où $l = -k$. Or, comme τ est le $\text{pgcd}(n, m)$, on a que $a - b = \tau \frac{n}{\tau} \alpha + \tau \frac{m}{\tau} k = \tau (\frac{n}{\tau} \alpha + \frac{m}{\tau} k)$. On peut ainsi conclure que $a - b$ est divisible par τ .

Maintenant supposons que $a - b$ est divisible par τ . Il existe donc un $k \in \mathbb{N}$ tel que $\tau k = a - b$. On peut donc réécrire la fonction $f_a - f_b$ comme

$$f_a(i,j) - f_b(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i + j < n \\ \tau k & \text{si } i + j \geq n. \end{cases}$$

Comme $\tau = \text{pgcd}(n, m)$, il existe $\alpha, c \in \mathbb{N}$ tel que $n\alpha + cm = \tau k$. On cherche donc un ϕ tel que si $i + j < n$ alors $\phi(i) + \phi(j) = \phi(i + j)$.

Supposons que $\phi(1) = \alpha$. On pose $\phi(2) = \phi(1) + \phi(1) = \alpha + \alpha = 2\alpha$ et ainsi de suite jusqu'à obtenir $\phi(n - 1) = (n - 1)\alpha$. Pour $i + j \geq n$ on pose $\phi(i) + \phi(j) - \phi(\overline{i + j}) = \phi(i) + \phi(j) - \phi(i + j - n) = n\alpha$. On obtiendra donc que $\phi(i) + \phi(j) - \phi(i + j - n) = n\alpha = n\alpha + cm = \tau k = f_a(i, j) - f_b(i, j)$.

Il en suit que, pour ce ϕ , on a $f_a - f_b = d\phi$. On peut donc conclure comme désiré que le cocycle $f_a - f_b = f_{a-b}$ est un cobord. \square

Note. On sait maintenant que la collection $\{f_0, \dots, f_{\tau-1}\}$ donne lieu à τ extensions non-isomorphes de \mathbb{Z}_n par \mathbb{Z}_m . On prétend que chaque extension est isomorphe à une de ces extensions. Il suffit de démontrer que chaque cocycle f est équivalent à un f_a pour $a \in \{0, \dots, \tau - 1\}$.

Proposition 6.12. *Chaque cocycle $f : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_m$ est équivalent à un f_a défini à la proposition 6.10, pour une unique valeur de $a \in \{0, \dots, \tau - 1\}$, où τ est le plus grand commun diviseur de m et n .*

Démonstration. On cherche $a \in \mathbb{Z}_m$ et $\phi : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_m$ tel que $f - f_a = d\phi$.
On aura

$$f(i, j) - f_a(i, j) = \begin{cases} f(i, j) & \text{si } i + j < n \\ f(i, j) - a & \text{si } i + j \geq n. \end{cases}$$

On sait qu'il existe $a \in \{0, \dots, n-1\}$ et qu'il existe $\beta \in \mathbb{Z}$ tels que $\sum_{k=1}^{n-1} f(1, k) = n\beta + a$. On obtient donc que $a = \sum_{k=1}^{n-1} f(1, k) - n\beta$.

Posons que $\phi(1) = \beta$. Pour que $\phi(1) + \phi(1) - \phi(2) = f(1, 1)$ on pose $\phi(2) = 2\beta - f(1, 1)$.

On utilise la même logique pour tout les éléments de \mathbb{Z}_n jusqu'à $\phi(n - 1) = (n - 1)\beta - \sum_{k=1}^{n-2} f(1, k)$.

Si $i + j < n$, on obtient

$$\begin{aligned} \phi(i) + \phi(j) - \phi(i + j) &= i\beta - \sum_{k=1}^{i-1} f(1, k) + j\beta - \sum_{k=1}^{j-1} f(1, k) - i\beta - j\beta + \sum_{k=1}^{i+j-1} f(1, k) \\ &= - \sum_{k=1}^{i-1} f(1, k) - \sum_{k=1}^{j-1} f(1, k) + \sum_{k=1}^{i+j-1} f(1, k) = \sum_{k=i}^{i+j-1} f(1, k) - \sum_{k=1}^{j-1} f(1, k) = f(i, j). \end{aligned}$$

Si $i + j \geq n$, on a

$$\begin{aligned}
\phi(i) + \phi(j) - \phi(i + j - n) &= i\beta - \sum_{k=1}^{i-1} f(1,k) + j\beta - \sum_{k=1}^{j-1} f(1,k) - i\beta - j\beta + n\beta \\
&\quad + \sum_{k=1}^{i+j-n-1} f(1,k) \\
&= n\beta - \sum_{k=i+j-n}^{j-1} f(1,k) - \sum_{k=1}^{i-1} f(1,k) \\
&= \sum_{k=i}^{n-1} f(1,k) - \sum_{k=i+j-n}^{j-1} f(1,k) - \sum_{k=1}^{n-1} f(1,k) + n\beta \\
&= \sum_{k=i}^{i+j-1} f(1,k) - \sum_{k=1}^{j-1} f(1,k) - \sum_{k=1}^{n-1} f(1,k) + n\beta \\
&= f(i,j) - a.
\end{aligned}$$

On vient ainsi de démontrer que $d\phi = f - f_a$. Ici on a prit $a \in \{0, \dots, n-1\}$, mais selon le théorème 6.11 on peut remplacer cette valeur de a par $a' \in \{0, \dots, \tau-1\}$ tel que $a - a'$ est divisible par τ . \square

7 Conclusion

On a donc réussi à démontrer que $H^2(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \simeq \mathbb{Z}_\tau$ où τ est le plus grand commun diviseur de m et n . Ainsi, avec la suite exacte courte suivante :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_m \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_n \longrightarrow 0$$

on peut conclure que si m et n sont copremiers $H^2(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m)$ ne contient qu'un seul élément soit l'extension triviale $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$.

Il pourrait être intéressant dans le futur d'appliquer les différents concepts abordés dans cet article afin de définir la cohomologie de groupes non cycliques. Il serait aussi possible par la suite de définir ce que représente $H^3(G, A)$ et de l'étudier en utilisant les principes définis dans cet article en plus de présenter de nouveaux sujets pour en faciliter la compréhension.

Références

[Cor] David CORFIELD : cohomology in mathematics. <https://ncatlab.org/davidcorfield/show/cohomology+in+mathematics1>. 2012.

CLOÉ ALLARD
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
Courriel: cloe.allard@USherbrooke.ca

Théorie ergodique

Tommy Giroux

Reçu le 2024-09-20 et accepté le 2026-03-20

RÉSUMÉ Le but de cet article est de familiariser le lecteur avec la théorie ergodique. Pour ce faire, nous présenterons certaines notions relatives à la théorie de la mesure et à l'analyse fonctionnelle. Au cours de l'article, nous donnerons un exemple de système ergodique et énoncerons certains résultats fondamentaux de la théorie ergodique. Nous présenterons notamment, et démontrerons, le célèbre théorème ergodique de Birkhoff.

1 Introduction

En 1871, Ludwig Boltzmann, un physicien autrichien, formule pour la première fois l'hypothèse ergodique. Selon cette hypothèse fondamentale de la physique statistique, à l'équilibre, la valeur moyenne d'une grandeur sur l'espace étudié est égale à la moyenne d'un très grand nombre de mesures effectuées dans le temps. De l'analyse mathématique de cette hypothèse est née la théorie ergodique. Dans ce nouveau cadre, l'ergodicité exprime l'idée qu'un point en mouvement dans un système visitera toutes les régions de celui-ci de manière aléatoire. On retrouve aussi cette idée dans la théorie du chaos, où l'ergodicité est vue comme une propriété caractéristique des systèmes chaotiques. De plus, en théorie des probabilités, la théorie ergodique permet également de généraliser la loi des grands nombres à des familles de variables aléatoires dépendantes (voir [Kle13, chapitre 20]).

Dans notre exploration de la théorie ergodique, nous aborderons les espaces métriques [Mor20], la théorie de la mesure [Gal09, Ros06] et l'analyse fonctionnelle [Mus14]. À l'aide des définitions et des résultats rassemblés au fil de l'article, nous serons alors en mesure de présenter les notions et les résultats élémentaires de la théorie ergodique [Gre15, EW11].

Pour illustrer l'idée au cœur de la théorie ergodique, nous démontrons un résultat concernant les orbites des rotations irrationnelles du cercle. Ce dernier peut être représenté par l'intervalle $[0,1]$ dont on identifie les extrémités, autrement dit par l'espace quotient \mathbb{R}/\mathbb{Z} . En identifiant \mathbb{R}/\mathbb{Z} à l'intervalle $[0,1)$, nous munissons \mathbb{R}/\mathbb{Z} de l'ordre induit. Ainsi, pour $a, b \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, l'expression $a < b$ signifie que les représentants choisis dans $[0,1)$ vérifient $a < b$.

Je tiens à remercier le Département de mathématiques de l'Université de Sherbrooke ainsi que le Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada pour leur soutien financier. J'exprime également ma gratitude à Jean-Philippe Burelle pour son aide dans le cadre de mes travaux de recherche.

Lemme 1.1 ([Gre15], Théorème 1.1). *Soit $T : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ une rotation du cercle définie par $Tx = x + \alpha \pmod{1}$, où $0 < \alpha < 1$. Alors, l'orbite $(T^n x)_{n=0}^\infty$ (où T^n désigne la composition de l'application T avec elle-même n fois) est dense dans \mathbb{R}/\mathbb{Z} si et seulement si α est irrationnel.*

Démonstration. Pour la nécessité, nous allons procéder par contraposée. Supposons que α est rationnel. Alors, il existe $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $\text{pgcd}(p, q) = 1$ et $\alpha = \frac{p}{q}$, ce qui implique qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{mp}{q} = p$. En particulier, $m = q$, et comme $T^n x = x + n\alpha$, l'orbite consiste en q points distincts, séparés par un écart de $\frac{1}{q}$. Ainsi, l'orbite $(T^n x)_{n=0}^\infty$ n'est pas dense dans \mathbb{R}/\mathbb{Z} .

Pour la suffisance, soit α irrationnel et

$$d: \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow [0, \infty)$$

$$(x, y) \mapsto d(x, y),$$

la métrique sur \mathbb{R}/\mathbb{Z} définie par $d(x, y) = \min(|x - y|, 1 - |x - y|)$. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, on remarque que comme α est irrationnel, il existe un entier naturel $n > 1$ tel que $x + (n - 1)\alpha \pmod{1} \leq y$ et $x + n\alpha \pmod{1} \geq y$, ce qui implique que $d(y, x + (n - 1)\alpha \pmod{1}) \leq \frac{\alpha}{2}$ ou que $d(y, x + n\alpha \pmod{1}) \leq \frac{\alpha}{2}$. Posons

$$n_1 = \begin{cases} n - 1 & \text{si } d(y, x + (n - 1)\alpha \pmod{1}) \leq \frac{\alpha}{2} \\ n & \text{si } d(y, x + n\alpha \pmod{1}) \leq \frac{\alpha}{2} \end{cases}.$$

Ce n_1 induit une nouvelle rotation :

$$T^{n_1}: \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

$$x \mapsto x + n_1\alpha \pmod{1}$$

Par récurrence, il est possible d'obtenir une suite $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ d'entiers naturels telle que :

$$d(y, T^{n_1} x) \leq \frac{\alpha}{2}$$

$$d(y, T^{n_2+n_1} x) \leq \frac{\alpha}{2^2}$$

$$d(y, T^{n_3+n_2+n_1} x) \leq \frac{\alpha}{2^3}$$

$$\vdots$$

On a donc que $d(y, T^{n_k+\dots+n_2+n_1} x) \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow \infty$, ce qui implique que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $x, y \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $d(y, T^n x) < \varepsilon$. Ainsi, l'orbite d'une rotation irrationnelle est dense dans \mathbb{R}/\mathbb{Z} . \square

Ce lemme jouera un rôle central dans la suite, puisqu'il servira de point de départ à la construction d'un système ergodique.

2 Définitions et premiers résultats

Chaque section commencera par un court rappel de certaines notions indispensables à la compréhension du sujet traité. Un lecteur expérimenté pourra, s'il le souhaite, passer cette sous-section.

2.1 Espace métrique et théorie de la mesure

Dans ce rappel, il sera question des espaces métriques et de la théorie de la mesure. En ce qui concerne les espaces métriques, la référence principale est [Mor20], tandis que pour la théorie de la mesure, nous nous appuyerons sur [Gal09] et [Ros06]. Pour plus de détails sur les espaces métriques, le lecteur pourra également consulter [Mus14]. Dans un premier temps, nous passerons en revue quelques définitions et résultats importants concernant les espaces métriques.

Définition 2.1. Soit X un ensemble non vide et $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ une application telle que, pour tous $a, b, c \in X$, on a les propriétés suivantes :

- i) $d(a, b) \geq 0$ et $d(a, b) = 0$ si et seulement si $a = b$,
- ii) $d(a, b) = d(b, a)$, et
- iii) $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$.

Alors, on appelle d une **métrique** sur X et on dit que (X, d) est un **espace métrique**.

En d'autres termes, un espace métrique n'est rien d'autre qu'un ensemble sur lequel on a défini une notion de distance. L'exemple le plus simple d'un tel espace est sans doute l'espace euclidien de dimension 1, c'est-à-dire le couple (\mathbb{R}, d) , où d désigne la distance euclidienne définie, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, par $d(x, y) = |x - y|$.

Dans un premier cours d'analyse, on se familiarise avec le concept de convergence dans le cas réel. Ici, nous utilisons les espaces métriques afin de généraliser ce concept. La définition suivante n'est rien d'autre que le prolongement naturel de la définition usuelle de la convergence au cadre des espaces métriques.

Définition 2.2. Soit (X, d) un espace métrique et $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points dans X . On dit que la suite **converge** vers $x \in X$, si pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $d(x, x_n) < \varepsilon$. On écrit $x_n \rightarrow x$. De plus, une suite $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de points de X est dite **convergente** dans (X, d) , s'il existe un point $y \in X$ tel que $y_n \rightarrow y$.

On note également que, dans le cas des espaces métriques, si la limite d'une suite existe, alors cette limite est unique. On termine ce rappel sur les espaces métriques par la définition des boules. Soient (X, d) un espace métrique, $p \in X$ et $r \in \mathbb{R}^{>0}$. On appelle **boule ouverte centrée en p** l'ensemble $B(p, r) := \{x \in X \mid d(p, x) < r\}$.

Il est maintenant temps de regarder du côté de la théorie de la mesure. Cette dernière nous permet de fournir un cadre rigoureux à la théorie ergodique.

Définition 2.3. Soit X un ensemble. On appelle **tribu** (ou **σ -algèbre**) sur X une famille \mathcal{A} de parties de X possédant les propriétés suivantes :

- i) $X \in \mathcal{A}$,
- ii) si $A \in \mathcal{A}$, alors $A^c \in \mathcal{A}$, et
- iii) si $A_n \in \mathcal{A}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Les éléments de \mathcal{A} sont appelés les **ensembles mesurables** (ou **parties mesurables**) de (X, \mathcal{A}) et on dit que (X, \mathcal{A}) est un **espace mesurable**.

Les tribus nous permettent de définir de façon rigoureuse la notion d'ensemble mesurable, un concept fondamental en théorie de la mesure. Dans le cas où X serait un ensemble contenant un nombre dénombrable d'éléments, on pourrait tout simplement prendre $M = \mathcal{P}(X)$, l'ensemble des parties de X . La définition précise d'une tribu n'est pas essentielle pour une bonne compréhension de la théorie ergodique. Une tribu sur un ensemble X est simplement un sous-ensemble de l'ensemble des parties de X , possédant certaines propriétés. La nécessité des tribus vient du fait qu'il n'est généralement pas possible de définir une mesure possédant certaines propriétés intéressantes sur l'ensemble des parties d'un ensemble donné. Les définitions suivantes nous permettront de nous familiariser avec deux types de tribus bien connus.

Définition 2.4. Soit X un ensemble et $M \subset \mathcal{P}(X)$. La **tribu engendrée** par M sur X est l'intersection de toutes les tribus sur X contenant les éléments de M .

On peut caractériser la tribu engendrée par M sur X comme étant la plus petite tribu sur X contenant les éléments de M . Notons aussi que la tribu engendrée par M sur X existe, puisque $\mathcal{P}(X)$ est une tribu sur X contenant M ; l'intersection considérée est donc non vide.

Définition 2.5. Soit (X, d) un espace métrique. Notons \mathcal{O} l'ensemble des **ouverts** de (X, d) (c'est-à-dire les boules ouvertes, leurs unions et les intersections finies de boules ouvertes). On appelle **tribu borélienne** (ou **tribu de Borel**) de X , et on la note $\mathcal{B}(X)$ (ou simplement \mathcal{B} lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion), la tribu engendrée par \mathcal{O} .

Après la fin de cette sous-section, lorsqu'il sera question de tribu, il s'agira de la tribu de Borel. Ceci dit, nous pouvons désormais discuter de mesure et d'espace mesuré.

Définition 2.6. Soient X un ensemble et \mathcal{A} une tribu sur X . On dit qu'une application $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ est une **mesure** sur (X, \mathcal{A}) , si elle vérifie les conditions suivantes :

- i) La mesure de la partie vide est nulle, c'est-à-dire, $\mu(\emptyset) = 0$.

- ii) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille dénombrable d'éléments de \mathcal{A} deux à deux disjoints (c'est-à-dire $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tous $i \neq j$), alors :

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

On appelle cette propriété la σ -**additivité**.

On dit que (X, \mathcal{A}, μ) est un **espace mesuré**.

Dans cet article, lorsque nous utiliserons le terme mesure, il s'agira en fait de **mesure de probabilité**. Plus précisément, considérons (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré. Alors, μ est une mesure de probabilité si $\mu(X) = 1$. Le lecteur remarquera qu'il n'est pas plus général de considérer les mesures finies (c'est-à-dire les mesures μ telles que $\mu(X) \in \mathbb{R}^{>0}$) que de considérer les mesures de probabilité. En effet, toute mesure finie peut être normalisée pour en faire une mesure de probabilité. La prochaine proposition nous donne quelques propriétés très utiles sur les mesures.

Proposition 2.7. [Propriétés élémentaires d'une mesure] *Soit μ une mesure sur l'espace mesurable (X, \mathcal{A}) , alors μ possède les propriétés suivantes :*

- i) *Monotonie : Si $A, B \in \mathcal{A}$ et $A \subset B$, alors $\mu(A) \leq \mu(B)$.*
 ii) *Sous-additivité : Si $A_n \in \mathcal{A}, \forall n \in \mathbb{N}$, alors*

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

- iii) *Si $A_n \in \mathcal{A}, \forall n \in \mathbb{N}$ et si $A_n \subset A_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$, alors*

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

- iv) *Si $A_n \in \mathcal{A}, \forall n \in \mathbb{N}$ et si $A_{n+1} \subset A_n, \forall n \in \mathbb{N}$ avec $\mu(A_0) < \infty$, alors*

$$\mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

Dans la théorie de la mesure, on rencontre fréquemment des ensembles de mesure nulle. On dit que ces ensembles sont **négligeables**.

Définition 2.8. Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré. On dit qu'une propriété \mathcal{P} est vraie **presque partout** (ou **p.p.**) si l'ensemble $\{x \in X \mid \mathcal{P}(x) \text{ est fautive}\}$ est de mesure nulle ou contenu dans un ensemble de mesure nulle.

La notion de propriété vraie presque partout est omniprésente dans tout l'article et elle est un concept fondateur de la théorie de la mesure. On poursuit avec un autre concept très important pour la suite de l'article.

Définition 2.9. Soient (X_1, \mathcal{A}_1) et (X_2, \mathcal{A}_2) deux espaces mesurables. On dit d'une application $T : X_1 \rightarrow X_2$ qu'elle est **mesurable** si $T^{-1}A \in \mathcal{A}_1, \forall A \in \mathcal{A}_2$ (où $T^{-1}A := \{x \in X \mid Tx \in A\}$ désigne l'image réciproque de l'ensemble A par T).

Par exemple, soit (X, \mathcal{B}) , un espace mesurable, toute application constante de X dans \mathbb{R} muni de sa tribu de Borel est mesurable, car l'image réciproque de tout ensemble mesurable de \mathbb{R} est X ou l'ensemble vide. Le lecteur prendra note que les applications continues de X dans \mathbb{R} muni de sa tribu de Borel sont mesurables (l'image réciproque d'un ouvert par une application continue est ouvert). De plus, il est important de remarquer que le concept d'application mesurable est indépendant de la mesure choisie. On termine cette sous-section par un exemple de mesure.

Définition 2.10. Soit l'espace mesuré $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, où $d \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ est la tribu de Borel de \mathbb{R}^d . On appelle **mesure de Lebesgue** la mesure λ telle que pour tout pavé $P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_d, b_d] \subset \mathbb{R}^d$,

$$\lambda(P) = \prod_{i=1}^d (b_i - a_i).$$

Le lecteur notera que la mesure de Lebesgue est invariante par translation et que l'existence d'une telle mesure constitue un fait non trivial (voir, par exemple, [Ros06, chapitre 2]). La propriété suivante est, elle aussi, un peu moins évidente.

Proposition 2.11. *La mesure de Lebesgue est extérieurement régulière. C'est-à-dire, pour tout $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $\lambda(E) = \inf\{\lambda(V) \mid V \text{ ouvert}, V \supset E\}$.*

2.2 Système préservant la mesure et ergodicité

On commence notre initiation à la théorie ergodique par quelques définitions et résultats élémentaires. L'approche utilisée dans cet article pour présenter la théorie ergodique est largement inspirée de celle que l'on retrouve dans [Gre15]. En particulier, cette section s'inspire des chapitres 2 et 3 de ces notes de cours. Pour les étudiants qui aimeraient poursuivre leur apprentissage en théorie ergodique, [EW11] serait une très bonne référence pour débiter, on l'utilise aussi comme référence pour certains résultats.

Définition 2.12. Soient $(X_1, \mathcal{B}_1, \mu_1)$ et $(X_2, \mathcal{B}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés et $T : X_1 \rightarrow X_2$ une application. On dit que T est une **application préservant la mesure** si T est mesurable et si $\mu_1(T^{-1}A) = \mu_2(A)$, pour tout $A \in \mathcal{B}$. Dans le cas où (X, \mathcal{B}, μ) est un espace mesurable et $T : X \rightarrow X$ est une application préservant la mesure, on appelle (X, \mathcal{B}, μ, T) un **système préservant la mesure**.

Le prochain résultat nous fournit un outil pour montrer qu'une application préserve la mesure. De plus, puisque nous travaillons seulement avec les tribus de Borel, ce résultat s'applique à tout l'article.

Lemme 2.13. Soient $(X_1, \mathcal{B}_1, \mu_1)$ et $(X_2, \mathcal{B}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés et $T : X_1 \rightarrow X_2$ une application mesurable. Supposons que \mathcal{B}_2 soit engendrée par une collection $M \subset \mathcal{P}(X_2)$. Supposons que pour tout $A \in M$, on a $\mu_1(T^{-1}A) = \mu_2(A)$, alors T est une application préservant la mesure.

Voir la démonstration du lemme 2.2 de [Gre15], pour la démonstration. Considérons une nouvelle fois les rotations irrationnelles du cercle et montrons qu'il s'agit d'un système préservant la mesure pour la mesure de Lebesgue.

Remarque . Ici, et pour la suite de l'article, on identifie \mathbb{R}/\mathbb{Z} à l'intervalle $[0,1]$ où on identifie les extrémités.

Exemple 2.14. Soient $X = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $T : X \rightarrow X$ la rotation définie par $Tx = x + \alpha \pmod{1}$, où $0 < \alpha < 1$ est irrationnel. Alors, $(X, \mathcal{B}, \lambda, T)$ est un système préservant la mesure, pour \mathcal{B} la tribu de Borel de X et λ la mesure de Lebesgue.

Démonstration. On peut démontrer que $\mathcal{B}(X)$ est engendrée par M , la collection d'ensembles qui contient les ensembles de la forme (a,b) et ceux de la forme $[0,a) \cup (b,1)$ où $a,b \in X$. Comme la mesure de Lebesgue est invariante par translation, on a $\lambda(T^{-1}A) = \lambda(A)$ pour tout $A \in M$. Ainsi, par le lemme précédent, $(X, \mathcal{B}, \lambda, T)$ est un système préservant la mesure. \square

Maintenant que nous avons un peu de vocabulaire, on peut énoncer et démontrer le premier résultat en lien direct avec la théorie ergodique.

Théorème 2.15. [Théorème de récurrence de Poincaré][[Gre15], Théorème 2.1] Soit (X, \mathcal{B}, μ, T) un système préservant la mesure. Soient $A \in \mathcal{B}$ et A' l'ensemble des $x \in A$ tels que $T^n x \in A$ pour une infinité de $n \in \mathbb{N}$. Alors, $\mu(A \setminus A') = 0$, c'est-à-dire, il existe une infinité de $n \in \mathbb{N}$ tels que $T^n x \in A$ pour presque tout $x \in A$.

Démonstration. Posons $U_N := \bigcup_{n \geq N} T^{-n}A$ (où $T^{-n}A$ désigne l'image réciproque de l'ensemble A par T^n), l'ensemble des $x \in X$ tels que $T^n x \in A$ pour un certain $n \geq N$, et $U := \bigcap_{N \in \mathbb{N}} U_N$, l'ensemble des $x \in X$ tels que $T^n x \in A$ pour une infinité d'entiers n . On remarque que U est mesurable, car U est une intersection dénombrable d'unions dénombrables d'ensembles mesurables. De plus, par la définition de A' , on a $A' = A \cap U$. Maintenant, considérons la suite $(U_N)_{N \in \mathbb{N}}$, on sait que l'on a l'imbrication d'ensembles mesurables $U_0 \supseteq U_1 \supseteq U_2 \supseteq \dots$. De plus, $\mu(U_{N+1}) = \mu(T^{-1}U_N) = \mu(U_N)$, car U_N est mesurable et

$$T^{-1}U_N = T^{-1}\left(\bigcup_{n \geq N} T^{-n}A\right) = \bigcup_{n \geq N} T^{-(n+1)}A = \bigcup_{n \geq N+1} T^{-n}A = U_{N+1}.$$

Par l'égalité que nous avons, le fait que $\mu(U_0) < \infty$ (μ est une mesure de probabilité) et les propriétés élémentaires d'une mesure, on a $\mu(U) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu(U_N) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu(U_0) = \mu(U_0)$. Donc $\mu(U_0 \setminus U) = 0$, ce qui implique que $\mu(A \setminus U) = 0$, car $A \subset U_0$. Ainsi, $\mu(A \setminus A') = 0$, car $\mu(A \setminus A') = \mu(A \setminus (A \cap U)) = \mu(A \setminus U) = 0$. \square

On présente par la suite un résultat qui découle immédiatement du théorème de récurrence de Poincaré. Plus précisément, si on considère la démonstration du théorème de récurrence de Poincaré, le prochain résultat découle du fait que $U \subset U_1$.

Corollaire 2.16. [Conséquence du théorème de récurrence de Poincaré] Soit (X, \mathcal{B}, μ, T) un système préservant la mesure, où μ est une mesure finie. Alors, pour tout $A \in \mathcal{B}$, $\mu\left(A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}A\right) = 0$.

Soient X un ensemble, E un sous-ensemble de X , et $T : X \rightarrow X$ une application. On dit que E est un ensemble **T -invariant** si $T^{-1}E = E$. De plus, considérons (X, \mathcal{B}, μ, T) un système préservant la mesure, on dit que E est un ensemble **presque T -invariant** si $\mu(E \Delta T^{-1}E) = 0$, où $E \Delta T^{-1}E := (E \setminus T^{-1}E) \cup (T^{-1}E \setminus E)$ désigne la différence symétrique des ensembles E et $T^{-1}E$. On peut maintenant entrer dans le vif du sujet et donner la définition de l'ergodicité.

Définition 2.17. Soit (X, \mathcal{B}, μ, T) un système préservant la mesure. On dit que T est **ergodique** si tous les ensembles presque T -invariants de (X, \mathcal{B}, μ, T) sont de mesure nulle ou 1.

En fait, ce n'est pas la transformation T qui est ergodique, mais le système au complet qui est ergodique. Dans une définition plus standard de l'ergodicité, on remplacerait "tous les ensembles presque T -invariants" par "tous les ensembles T -invariants". On pourrait être porté à penser que les deux définitions ne sont pas équivalentes, puisque qu'une condition sur tous les ensembles presque T -invariants est plus restrictive qu'une condition sur tous les ensembles T -invariants. En fait, les deux définitions sont équivalentes. On retrouve le même résultat (proposition 2.14) dans [EW11].

Proposition 2.18. Soit (X, \mathcal{B}, μ, T) un système préservant la mesure. Alors, tous les ensembles presque T -invariants sont de mesure nulle ou 1 si et seulement si tous les ensembles T -invariants sont de mesure nulle ou 1.

Démonstration. Supposons que tous les ensembles presque T -invariants sont de mesure nulle ou 1. Alors, tous les ensembles T -invariants sont de mesure nulle ou 1, car les ensembles T -invariants sont en particulier des ensembles presque T -invariants.

Au contraire, supposons que tous les ensembles T -invariants sont de mesure nulle ou 1. Soit E un ensemble presque T -invariant, alors $\mu(E \Delta T^{-1}E) = 0$. Posons $E' := \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq N} T^{-n}E$. Alors, E' est un ensemble T -invariant, car $T^{-1}E' = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq N} T^{-(n+1)}E = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq N} T^{-n}E$. On peut également montrer, de manière assez directe, que

$$E \Delta E' \subset \bigcup_{n \geq 1} (E \Delta T^{-n}E).$$

De plus, comme pour tous ensembles A, B, C , on a $A\Delta B \subset (A\Delta C) \cup (B\Delta C)$, un simple calcul montre que

$$\mu(E\Delta T^{-n}(E)) \leq \sum_{i=1}^n \mu(T^{-(i-1)}E\Delta T^{-i}E) = n\mu(E\Delta T^{-1}E) = 0.$$

Donc $\mu(E\Delta E') = 0$, ce qui implique que $\mu(E) = \mu(E')$. Ainsi, tous les ensembles presque T -invariants sont de mesure nulle ou 1. \square

À l'aide du théorème de récurrence de Poincaré, on peut reformuler notre définition de l'ergodicité et obtenir une définition équivalente.

Lemme 2.19. *Un système préservant la mesure (X, \mathcal{B}, μ, T) est ergodique si et seulement si pour tout $A \in \mathcal{B}$ avec $\mu(A) > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $T^n x \in A$, pour presque tout $x \in X$.*

Démonstration. Pour la suffisance. Supposons que (X, \mathcal{B}, μ, T) est ergodique. On prétend que l'ensemble $A_+ := \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}A$ des $x \in X$ pour lesquels il existe un certain $n \in \mathbb{N}$ tel que $T^n x \in A$ est presque T -invariant. On sait que $T^{-1}A_+ \subset A_+$ et que la différence symétrique de ces deux ensembles est $A_+ \setminus T^{-1}A_+$. De plus,

$$A_+ \setminus T^{-1}A_+ = T^{-1}A \setminus (T^{-2}A \cup T^{-3}A \cup T^{-4}A \cup \dots),$$

qui est de mesure nulle par le corollaire du théorème de récurrence de Poincaré et donc A_+ est presque T -invariant. Puisque T est ergodique, on a $\mu(A_+) = 0$ ou 1. Cependant, $\mu(A_+) > 0$, car $\mu(A) > 0$ et $\mu(A \setminus A_+) = 0$ (corollaire du théorème de récurrence de Poincaré). Ainsi, $\mu(A_+) = 1$, autrement dit presque tout les points de X sont dans A_+ .

Pour la nécessité, soit $E \in \mathcal{B}$ un ensemble presque T -invariant et E_+ défini comme A_+ . Par le théorème de récurrence de Poincaré $\mu(E) = \mu(E_+ \cap E)$. Sans perte de généralité, supposons que $\mu(E) > 0$. Alors, par hypothèse, $\mu(E_+) = 1$. Ainsi, $\mu(E) \in \{0, 1\}$, ce qui implique que le système est ergodique. \square

3 Théorème ergodique

Les sections de ce chapitre concernant directement la théorie ergodique sont inspirées des chapitres 3,4 et 5 de [Gre15].

3.1 Un peu plus de théorie de la mesure et les espaces de Hilbert

Afin d'approfondir notre étude de la théorie ergodique, il nous faut plus de connaissances sur la théorie de la mesure et les espaces de Hilbert. Ces deux sujets nécessitent une certaine connaissance des espaces métriques complets [Mor20]. Commençons par un rappel sur ces espaces et leurs propriétés.

Définition 3.1. Une suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de points dans un espace métrique (X, d) est appelée une **suite de Cauchy** si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier positif n_0 tel que pour tout $m \geq n_0$ et $n \geq n_0$, $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Toute suite convergente est une suite de Cauchy, mais la réciproque n'est généralement pas vraie, ce qui nous mène à la prochaine définition.

Définition 3.2. Un espace métrique (X,d) est dit **complet** si toute suite de Cauchy dans (X,d) converge.

Considérons $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace normé, alors (X, d_X) est un espace métrique pour $d_X(x,y) = \|x - y\|_X$ pour tout $x,y \in X$. On termine ce rappel sur les espaces métriques complets avec la définition d'un sous-espace fermé et une de ses propriétés en lien avec les espaces métriques complets.

Définition 3.3. Soit (X,d) un espace métrique. On dit de Y un sous-ensemble de X qu'il est un **sous-espace fermé** de (X,d) si et seulement si toute suite de points dans Y convergente dans X converge vers un point de Y .

Le lecteur prendra note qu'il ne s'agit pas d'une définition standard des sous-espaces fermés, mais plutôt d'une définition équivalente.

Lemme 3.4. Soient (X,d_1) un espace métrique complet, Y un sous-ensemble de X et d_2 la métrique induite sur Y par d_1 . Alors, (Y,d_2) est un sous-espace fermé de (X,d_1) si et seulement si (Y,d_2) est un espace métrique complet.

Maintenant que nous nous sommes dotés de ces définitions et résultats sur les espaces métriques complets, nous pouvons passer au complément sur la théorie de la mesure [Gal09]. On dit de f , une fonction, qu'elle est **simple**, si $f = \sum_{i=1}^n c_i 1_{E_i}$, où les c_i sont des constantes et les E_i sont des ensembles mesurables. Le lecteur prendra soin de noter que la somme est finie. On commence par définir l'intégrale d'une fonction simple et positive. Soient (X, \mathcal{B}, μ) , un espace mesuré et $f : X \rightarrow [0, \infty)$, une fonction simple et positive. Supposons que $f = \sum_{i=1}^n c_i 1_{E_i}$, où les c_i sont des constantes et les E_i sont des ensembles mesurables. Alors, on appelle intégrale de f (par rapport à la mesure μ), la somme $\sum_{i=1}^n c_i \mu(E_i)$ que l'on note $\int_X f d\mu$. Par la suite, on étend la définition d'intégrale aux fonctions mesurables et positives. Soit $f : X \rightarrow [0, \infty)$, une fonction mesurable et positive. On définit l'intégrale de f sur X par :

$$\int_X f d\mu := \sup \left\{ \int_X \Phi d\mu \mid \Phi \in \varepsilon_+(X) \text{ et } \Phi \leq f \text{ p.p.} \right\},$$

où $\varepsilon_+(X)$ est l'ensemble des fonctions simples et positives. De plus, on dit que f est intégrable si $\int_X f d\mu < \infty$. Il suffit maintenant de généraliser le concept aux fonctions quelconques. Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction mesurable. Alors, il existe $f^+ := \max(0, f)$ et $f^- := \min(0, f)$, deux fonctions positives et mesurables telles que $f = f^+ - f^-$ et on dit que f est intégrable si f^+ et f^- le sont. Dans ce cas, l'intégrale de f est $\int_X f d\mu := \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$. La généralisation aux fonctions complexes se fait de façon analogue à la définition précédente. On considère f une fonction complexe, on a $f = \Re(f) + i\Im(f)$ et on dit que f est intégrable si $\Re(f)$ et $\Im(f)$ le sont. Nous ne présenterons pas toutes les propriétés de l'intégrale d'une fonction par rapport à une mesure, mais il est intéressant de

noter que cette intégrale partage certaines propriétés (par exemple, la linéarité) avec l'intégrale de Riemann.

On poursuit, en donnant la définition des espaces \mathcal{L}^p et de leurs normes p.

Définition 3.5. Soient $p \in [1, \infty)$, (X, \mathcal{B}, μ) un espace mesuré et \mathcal{M} l'ensemble des classes d'applications mesurables de X dans \mathbb{R} (respectivement \mathbb{C}) pour la relation d'égalité p.p.. On définit $L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ comme l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{M}$ vérifiant $\int_X |f|^p d\mu < +\infty$ (lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion, on note $L^p(X)$). De plus, on note $L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$, l'ensemble des classes de fonctions $f \in \mathcal{M}$ essentiellement bornées, c'est-à-dire, les fonctions $f \in \mathcal{M}$ telle qu'il existe $M > 0$ avec $|f| \leq M$ p.p. (lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion, on note $L^\infty(X)$). Pour $f \in L^p(X)$, on appelle **la norme** \mathcal{L}^p de f et on note $\|f\|_p$, le nombre réel $\|f\|_p := (\int_X |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$. De façon analogue, pour $f \in \mathcal{L}^\infty$, on appelle **la norme** \mathcal{L}^∞ de f et on note $\|f\|_\infty$, le nombre réel $\|f\|_\infty := \inf\{M \in [0, \infty) \mid |f| \leq M \text{ p.p.}\}$. On définit pour tout $p \in \mathbb{N}^* \cup \infty$, **l'espace** $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ comme l'ensemble $L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ munie de la norme $\|\cdot\|_p$ (lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion, on note $\mathcal{L}^p(X)$).

Pour conclure cette partie sur la théorie de la mesure nous présenterons trois résultats sur les espaces \mathcal{L}^p .

Théorème 3.6. *Les fonctions simples sont denses dans \mathcal{L}^1 .*

Théorème 3.7. [Théorème de Riesz-Fischer] *Pour tout $p \in [1, \infty]$, les espaces \mathcal{L}^p munis de leur norme $\|\cdot\|_p$ sont des espaces vectoriels complets.*

Le résultat nous dit que toute suite de Cauchy dans \mathcal{L}^p converge en norme p. Il faut interpréter ce résultat de la bonne façon. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions dans \mathcal{L}^p (où $p \neq \infty$), supposons que cette suite converge vers f en norme p. Le fait que la suite converge en norme p n'implique pas que f_n converge simplement p.p. vers f . En effet, il est très important de comprendre qu'il s'agit de deux convergences différentes et que l'une n'implique pas nécessairement l'autre.

Remarque 3.8. Un résultat de la théorie de la mesure nous dit que toute suite qui converge en norme \mathcal{L}^p admet une sous-suite convergente p.p..

Théorème 3.9. *Soit (X, \mathcal{B}, μ) un espace mesuré, de mesure finie. Alors, pour tout $p, q \in [1, \infty]$ tels que $p < q$, $\mathcal{L}^q \subset \mathcal{L}^p$.*

Puisque dans le cadre de cet article nous travaillons seulement avec des mesures de type finie, le dernier théorème est donc toujours valide.

Par la suite, nous allons avoir besoin de quelques notions sur les espaces de Hilbert. Encore une fois, pour plus de détails concernant les espaces de Hilbert, le lecteur est invité à consulter [Mus14], c'est aussi notre référence pour ce qui concerne les espaces de Hilbert. Tout d'abord, de façon informelle, les espaces de Hilbert sont des espaces vectoriels réels (respectivement complexes), dans lesquels nous pouvons appliquer nos techniques d'analyse. La première étape pour définir les espaces de Hilbert, était de définir les espaces métriques complets et maintenant, il nous reste juste à étendre le concept de produit scalaire aux espaces vectoriels complexes.

Définition 3.10. Soit E un espace vectoriel complexe muni d'une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ telle que pour $x, y, z \in E$ et $a, b \in \mathbb{C}$, on a :

- i) $\langle ax + y, z \rangle = \bar{a}\langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$,
- ii) $\langle x, by + z \rangle = b\langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$,
- iii) pour tout $x, y \in E$, $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$,
- iv) pour tout $x \in E$, $\langle x, x \rangle \geq 0$, et
- v) pour tout $x \in E$, $\langle x, x \rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Alors, on dit que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un **produit scalaire hermitien**.

Définition 3.11. Un **espace de Hilbert** H est un espace vectoriel complexe (respectivement réel) muni d'un produit scalaire hermitien (respectivement euclidien) $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ (respectivement \mathbb{R}) avec la propriété que H est complet par rapport à la norme $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ induite par ce produit scalaire hermitien (respectivement euclidien).

Notons que, d'après le lemme 3.4, un sous-ensemble d'un espace de Hilbert est un espace de Hilbert si et seulement s'il est fermé. Le premier exemple d'un tel espace est l'espace \mathcal{L}^2 . Soit (X, \mathcal{B}, μ) un espace mesuré, alors $\mathcal{L}^2(X)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{L}^2 \times \mathcal{L}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ défini par $\langle f, g \rangle = \int_X \bar{f}g d\mu$ pour tout $f, g \in \mathcal{L}^2(X)$. Pour terminer cette sous-section, nous allons regarder quelques définitions et propriétés concernant les opérateurs et les fonctionnelles.

Définition 3.12. Soit H un espace de Hilbert. Un **opérateur linéaire continu** sur H est une transformation linéaire continue $T : H \rightarrow H$. C'est-à-dire, une application de $T : H \rightarrow H$ qui respecte les conditions suivantes :

- i) Pour tout $x, y \in H$, $T(x + y) = Tx + Ty$.
- ii) Pour tout $x \in H$ et $\lambda \in \mathbb{F}$, $T(\lambda x) = \lambda Tx$
- iii) Pour toute suite de Cauchy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de H , $T(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n$.

Une **fonctionnelle** sur H est une application linéaire continue $\phi : H \rightarrow \mathbb{F}$. L'ensemble des fonctionnelles est dénoté H^* et on dit que H^* est l'**espace dual** de H .

Définition 3.13. Soit H un espace de Hilbert, et notons $\|\cdot\|_H$ la norme induite par son produit scalaire. Un **opérateur linéaire borné** sur H est une application linéaire $\phi : H \rightarrow H$ telle qu'il existe une constante $C > 0$ vérifiant $\|\phi x\|_H \leq C\|x\|_H$ pour tout $x \in H$. L'infimum de toutes les constantes satisfaisant cette inégalité est appelé la **norme de l'opérateur** ϕ , et se note $\|\phi\|_{\text{op}}$.

En fait, dans les espaces normés, il n'y a pas de différence entre les applications linéaires bornées et les applications linéaires continues. Comme les espaces de Hilbert sont normés, les deux applications sont équivalentes. La prochaine proposition découle de la complétude des espaces de Hilbert et des propriétés des sous-espaces vectoriels fermés.

Proposition 3.14. *Soient H un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ et $V \subset H$ un sous-espace vectoriel fermé. On définit le **complément orthogonal** de V par $V^\perp := \{x \in H \mid \langle x, v \rangle_H = 0, \forall v \in V\}$. Alors, H se décompose comme $H = V \oplus V^\perp$, et il existe un unique opérateur linéaire $\pi : H \rightarrow V$ vérifiant :*

- i) $\pi|_V$ est l'identité sur V ;
- ii) $\pi|_{V^\perp}$ est l'application nulle ;
- iii) pour tout $x \in H$, $x - \pi x \in V^\perp$.

Le prochain résultat qui nous intéresse est le théorème de représentation de Riesz, ce dernier est sans doute l'un des théorèmes les plus importants concernant les espaces Hilbert. En effet, il établit un isomorphisme entre un espace de Hilbert H et son espace dual H^* muni de la norme $\|x^*\|_{H^*} = \|x\|_H$.

Théorème 3.15. [Théorème de représentation de Riesz] *Soit H un espace de Hilbert. Pour toute fonctionnelle $\phi \in H^*$, il existe un unique $x_\phi \in H$ tel que $\phi(x) = \langle x_\phi, x \rangle$ pour tout $x \in H$ et $\|\phi\|_{\text{op}} = \|x_\phi\|_H$.*

En fait, dans le cadre de cet article, le théorème de représentation de Riesz est surtout important pour justifier l'existence et l'unicité de l'adjoint d'un opérateur linéaire borné.

Définition 3.16. Soient H un espace de Hilbert et $\phi : H \rightarrow H$ un opérateur linéaire borné. On dit de ϕ^* qu'il est l'**adjoint** de ϕ , si $\phi^* : H \rightarrow H$ est un opérateur linéaire borné tel que $\langle \phi x, y \rangle = \langle x, \phi^* y \rangle$ pour tout $x, y \in H$. Dans ce cas, on a $\|\phi\|_{\text{op}} = \|\phi^*\|_{\text{op}}$.

3.2 Exemple de système ergodique

Nous n'avons toujours pas donné d'exemple de système ergodique, la raison principale étant le fait qu'il est assez fastidieux de montrer qu'un système est ergodique. Cependant, nous sommes à quelques résultats près de pouvoir montrer que le système de l'exemple 2.14 est ergodique. Le lecteur notera toutefois que les résultats présentés dans cette sous-section restent pertinents pour le reste de l'article. On commence par donner deux résultats sur les fonctions de \mathcal{L}^1 .

Lemme 3.17. *Supposons que (X, \mathcal{B}, μ, T) est un système préservant la mesure et que f est une fonction de $\mathcal{L}^1(X)$. Alors, $\int_X f \, d\mu = \int_X f \circ T \, d\mu$. (C'est-à-dire, $\int_X f(x) \, d\mu = \int_X f(Tx) \, d\mu$).*

Démonstration. On commence par montrer que le résultat est vrai pour les fonctions simples. Puisque l'intégrale est linéaire, on peut supposer sans perte de généralité que $f = 1_E$, où E est mesurable. Alors, $\int_X f \, d\mu = \int_X 1_E \, d\mu = \mu(E)$ et

$$\int_X f \circ T \, d\mu = \int_X 1_E \circ T \, d\mu = \int_X 1_{T^{-1}E} \, d\mu = \mu(T^{-1}E).$$

Donc comme T est une application préservant la mesure, on a $\int_X f \, d\mu = \int_X (f \circ T) \, d\mu$.

Considérons maintenant $f \in \mathcal{L}^1(X)$ quelconque et fixons $\varepsilon > 0$. Comme l'espace des fonctions simples est dense dans $\mathcal{L}^1(X)$, il existe une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions simples telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - g_n\|_1 = 0$. De plus, d'après la remarque 3.8, il existe une sous-suite $(g_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge presque partout vers f . Comme T est mesurable, on en déduit que $(g_{n_k} \circ T)_{k \in \mathbb{N}}$ converge presque partout vers $f \circ T$. Par ailleurs, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, on a $\|g_n \circ T - g_m \circ T\|_1 = \|g_n - g_m\|_1$, puisque ce résultat a déjà été démontré pour les fonctions simples. Alors, $(g_n \circ T)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}^1(X)$ et, comme $\mathcal{L}^1(X)$ est complet, elle converge en norme L^1 vers une certaine limite $h \in \mathcal{L}^1(X)$. Cependant, la sous-suite $(g_{n_k} \circ T)$ converge presque partout vers $f \circ T$. Par l'unicité de la limite presque partout, on a donc $h = f \circ T$ (dans \mathcal{L}^1). Donc la suite $(g_n \circ T)$ converge en norme \mathcal{L}^1 vers $f \circ T$. Par conséquent, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|f - g_n\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $\|f \circ T - g_n \circ T\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Cependant, par le fait que le résultat est vrai pour les fonctions simples, on a :

$$\begin{aligned} \left| \int_X f \, d\mu - \int_X f \circ T \, d\mu \right| &\leq \left| \int_X f - g_n \, d\mu \right| + \left| \int_X f \circ T - g_n \circ T \, d\mu \right| \\ &\leq \|f - g_n\|_1 + \|f \circ T - g_n \circ T\|_1 \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

Ainsi, comme ε était arbitraire, on a bien que $\int_X f \, d\mu = \int_X f \circ T \, d\mu$. \square

Par la suite, dans le but de donner notre premier exemple de système ergodique, on doit montrer que toutes les fonctions indicatrices d'un ensemble mesurable de $\mathcal{B}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ peuvent être approximées par des fonctions continues de \mathbb{R}/\mathbb{Z} dans $[0,1]$ avec une précision arbitraire en norme \mathcal{L}^1 .

Lemme 3.18. *Soit $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ un ensemble mesurable. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction continue $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow [0,1]$ telle que $\|f - 1_E\|_1 \leq \varepsilon$.*

Démonstration. Soient $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, un ensemble mesurable et $\varepsilon > 0$. Par le fait que la mesure de Lebesgue est extérieurement régulière, il existe U un ouvert de \mathbb{R}/\mathbb{Z} telle que $E \subset U$ et $\lambda(U \Delta E) \leq \frac{\varepsilon}{3}$. De plus,

$$\lambda(U \Delta E) = \lambda(E \setminus U) + \lambda(U \setminus E) = \lambda(U \setminus E).$$

On peut écrire U comme une union dénombrable d'intervalles ouvertes et disjoints de \mathbb{R}/\mathbb{Z} . Posons $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, où la collection $\{B_1, B_2, B_3, \dots\}$ est une

collection d'intervalles ouvertes et disjointes. Soit $U_J = \bigcup_{i=1}^J B_i$, une suite d'ensembles emboîtés telle que $U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \dots$. Par les propriétés élémentaires des mesures on a :

$$\lambda\left(\bigcup_{J=1}^{\infty} U_J\right) = \lim_{J \rightarrow \infty} \lambda(U_J) = \lambda(U).$$

On a donc pour J assez grand, $\lambda(U \setminus U_J) \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Cependant,

$$\begin{aligned} \|1_E - 1_{U_J}\|_1 &= \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} |1_E - 1_{U_J}| d\lambda \\ &= \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} |1_{E \setminus U_J} - 1_{U_J \setminus E}| d\lambda \\ &= \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} |1_{E \setminus U_J \cup U_J \setminus E}| d\lambda \\ &= \lambda(E \setminus U_J \cup U_J \setminus E) \\ &= \lambda(E \setminus U_J) + \lambda(U_J \setminus E) \\ &\leq \frac{2\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Sans perte de généralité supposons que $B_i = (a_i, b_i)$, où $a_i, b_i \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $a_i < b_i$. Posons,

$$X_{B_i, \delta}(x) = \begin{cases} \frac{x-a_i}{\delta} & \text{si } x \in (a_i, a_i + \delta) \\ 1 & \text{si } x \in [a_i + \delta, b_i - \delta] \\ \frac{b_i-x}{\delta} & \text{si } x \in (b_i - \delta, b_i) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

pour δ petit. On remarque que $X_{B_i, \delta}$ est une fonction continue et que $\sum_{i=1}^J X_{B_i, \delta}$ est aussi une fonction continue, car les intervalles ouverts B_1, B_2, B_3, \dots sont deux à deux disjoints. De plus, un simple calcul montre que $\|X_{B_i, \varepsilon} - 1_{B_i}\|_1 \leq \varepsilon$. En prenant, $f = \sum_{i=1}^J X_{B_i, \frac{\varepsilon}{3J}}$, il est possible, en utilisant l'inégalité du triangle, de montrer que $\|f - 1_{U_J}\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Ainsi, comme $\|f - 1_E\|_1 \leq \|f - 1_{U_J}\|_1 + \|1_{U_J} - 1_E\|_1 \leq \varepsilon$, la démonstration se termine. \square

Reprenons l'exemple des rotations irrationnelles du cercle et montrons qu'il s'agit d'un système ergodique pour la mesure de Lebesgue. Nous avons déjà établi qu'il s'agit d'un système préservant la mesure; il reste donc à démontrer que tout ensemble presque T -invariant est de mesure nulle ou de mesure 1.

Exemple 3.19 ([Gre15], Proposition 3.1). Soient $X = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, \mathcal{B} la tribu de Borel de X , $T : X \rightarrow X$ la rotation $Tx = x + \alpha \pmod{1}$ où α est irrationnel et λ la mesure de Lebesgue. Alors, $(X, \mathcal{B}, \lambda, T)$ est un système ergodique.

Démonstration. Supposons que E est un ensemble presque T -invariant, notons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1_E(T^n) = 1_E$ p.p.. Soit $\varepsilon > 0$. Le lemme 3.18 nous dit qu'il est possible de trouver une fonction continue f telle que $\|f - 1_E\|_1 \leq \varepsilon$. Du lemme 3.17 et du fait que T est une application préservant la mesure, on a

$\|(f - 1_E) \circ T^n\|_1 \leq \varepsilon$. De plus, comme $1_E = 1_E \circ T^n$ p.p., $\|1_E - f \circ T^n\|_1 \leq \varepsilon$. Par l'inégalité du triangle, il suit que $\|f - f \circ T^n\|_1 \leq 2\varepsilon$. De façon explicite, nous avons que

$$\int_0^1 |f(x) - f(x + n\alpha)| d\lambda(x) \leq 2\varepsilon.$$

Dans l'introduction, nous avons montré que les orbites des rotations irrationnelles sur le cercle étaient denses. Donc pour tout $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, il existe une suite (n_i) d'entiers telle que $n_i\alpha \pmod{1} \rightarrow t$ lorsque $i \rightarrow \infty$. Il suit donc de la continuité de f que

$$\int_0^1 |f(x) - f(x + t)| d\lambda(x) \leq 2\varepsilon$$

pour tout $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Considérons l'application mesurable $\int_0^1 f : X \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\int_0^1 f(x) := \int_0^1 f(x + t) d\lambda(t)$. Alors,

$$\begin{aligned} \|f - \int_0^1 f\|_1 &= \int_0^1 |f(x) - \int_0^1 f(x + t) d\lambda(t)| d\lambda(x) \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 |f(x) - f(x + t)| d\lambda(t) d\lambda(x) \\ &\leq 2\varepsilon, \end{aligned}$$

où la dernière inégalité vient du théorème de Fubini adapté aux espaces mesurés. Donc par l'inégalité du triangle, $\|1_E - \int_0^1 f\|_1 \leq 3\varepsilon$. Ceci implique que

$$|\lambda(E) - \int_0^1 f| \leq \int_0^1 |1_E - \int_0^1 f| d\lambda \leq 3\varepsilon$$

et donc encore une fois par l'inégalité du triangle $\|1_E - \lambda(E)\|_1 \leq 6\varepsilon$. Cependant, $\varepsilon > 0$ est arbitraire. Donc $\|1_E - \lambda(E)\|_1 = 0$, ce qui implique que $1_E = \lambda(E)$ p.p.. Ainsi, il suit que $\lambda(E) = 0$ ou 1 . \square

3.3 Théorème ergodique moyen de von Neumann

Dans cette sous-section, nous allons caractériser l'espace I_T des fonctions presque T -invariantes et établir notre premier résultat ergodique. Considérons un système préservant la mesure (X, \mathcal{B}, μ, T) . Pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^2(X)$, nous noterons $U_T f(x) := f(Tx)$. D'après le lemme 3.17 et le théorème 3.9, l'application $U_T : \mathcal{L}^2(X) \rightarrow \mathcal{L}^2(X)$ est une isométrie, c'est-à-dire que $\|U_T f\|_2 = \|f\|_2$ pour tout $f \in \mathcal{L}^2(X)$. En particulier, U_T est un opérateur linéaire borné sur $\mathcal{L}^2(X)$. L'espace des fonctions T -invariantes du système (X, \mathcal{B}, μ, T) est le sous-espace $I_T := \{f \in \mathcal{L}^2(X) \mid f = U_T f\}$. Le lecteur notera que I_T est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}^2(X)$.

Lemme 3.20. *Une transformation T est ergodique si et seulement si l'espace I_T des fonctions p.p. T -invariantes ne contient que des fonctions p.p. constantes.*

Démonstration. Pour la suffisance, supposons que I_T ne contient des fonctions constantes p.p.. Soit $E \in \mathcal{B}$, un ensemble mesurable et presque T -invariant, alors $1_E(x) = 1_E(Tx) = U_T 1_E(x)$, ce qui implique que $1_E \in I_T$ et par hypothèse 1_E est p.p. constante. Ainsi, on a bien que $\mu(E) \in \{0,1\}$.

Pour la nécessité, supposons que T est ergodique. Soit $f \in I_T$, c'est-à-dire $f \in \mathcal{L}^2(X)$ tel que $f(x) = f(Tx)$ p.p.. Notons que f est mesurable, puisqu'elle appartient à $\mathcal{L}^2(X)$. Supposons de plus que f est une fonction de X dans \mathbb{R} . Comme f est mesurable et presque T -invariante, pour tout ensemble mesurable $A \subset \mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in X \mid f(x) \in A\}$ est presque T -invariant et mesurable. De plus, comme T est ergodique, on a $\mu(\{x \in X \mid f(x) \in A\}) \in \{0,1\}$.

Posons

$$c := \inf\{b \in \mathbb{R} \mid \mu(\{x \mid f(x) \geq b\}) = 0\}.$$

Supposons que $a < c$. Alors, par définition de c , on a $\mu(\{x \in X \mid f(x) > a\}) > 0$. Comme l'ensemble $\{x \in X \mid f(x) > a\}$ est presque T -invariant et mesurable, l'ergodicité de T implique que $\mu(\{x \in X \mid f(x) > a\}^c) = \mu(\{x \in X \mid f(x) \leq a\}) = 0$. Ainsi, $f > a$ p.p. pour tout $a < c$, ce qui entraîne que $f \geq c$ p.p.

D'un autre côté, supposons que $a > c$. Alors, par définition de c , on a $\mu(\{x \in X \mid f(x) > a\}) = 0$. Ainsi, $f \leq a$ p.p., ce qui implique que $f \leq c$ p.p., puisque $a > c$ est arbitraire. On en déduit que $f = c$ p.p.

Montrons à présent que le résultat reste valable lorsque f est une fonction complexe. Écrivons $f = \Re(f) + i\Im(f)$. Si $f(x) = f(Tx)$, alors $\Re(f)(x) = \Re(f)(Tx)$ et $\Im(f)(x) = \Im(f)(Tx)$. On peut donc appliquer l'argument précédent séparément à $\Re(f)$ et à $\Im(f)$. \square

On sait que \mathcal{L}^2 est un espace de Hilbert, que I_T est un sous-espace fermé et que U_T est un opérateur linéaire borné. Le lemme suivant découle alors de la proposition 3.14 ainsi que de l'existence et de l'unicité de l'adjoint d'un opérateur linéaire borné.

Lemme 3.21. *Soit (X, \mathcal{B}, μ, T) un système préservant la mesure et $U_T : \mathcal{L}^2(X) \rightarrow \mathcal{L}^2(X)$ l'opérateur défini par $U_T f = f \circ T$. Alors,*

i) si $f \in I_T$, on a $U_T^ f = f$, où U_T^* désigne l'adjoint de U_T ;*

ii) si T est ergodique, pour tout $f \in \mathcal{L}^2(X)$,

$$\pi_T(f) = \int_X f \, d\mu,$$

où $\pi_T : \mathcal{L}^2(X) \rightarrow I_T$ est la projection orthogonale sur I_T donnée par la proposition 3.14.

Démonstration. Pour *i)* on sait que U_T est un opérateur linéaire borné et donc par le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique opérateur U_T^* (l'adjoint de U_T) tel que pour tout $f, g \in \mathcal{L}^2(X)$, $\langle U_T f, g \rangle = \langle f, U_T^* g \rangle$. Cependant,

pour tout $f, g \in \mathcal{L}^2(X)$, on a $\langle U_T g, U_T f \rangle = \langle g, f \rangle$, car U_T est une isométrie. Considérons $f \in I_T$. Alors, $f = U_T f$ et pour tout $g \in \mathcal{L}^2(X)$ on a :

$$\begin{aligned} \langle g, f - U_T^* f \rangle &= \langle g, f \rangle - \langle g, U_T^* f \rangle \\ &= \langle U_T g, U_T f \rangle - \langle U_T g, f \rangle \\ &= \langle U_T g, U_T f - f \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

En particulier, si $g = f - U_T^* f$, on a $\|f - U_T^* f\|_2 = 0$, ce qui implique que $U_T^* f = f$.

Pour la partie *ii*), on sait que I_T est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}^2(X)$. On a donc la décomposition orthogonale $\mathcal{L}^2(X) = I_T \oplus I_T^\perp$. Cependant,

$$I_T^\perp = \{f \in \mathcal{L}^2(X) \mid \langle f, g \rangle = 0 \ \forall g \in I_T\} = \{f \in \mathcal{L}^2(X) \mid g \langle f, 1 \rangle = 0 \ \forall g \in I_T\},$$

puisque, d'après le lemme 3.21 et le fait que T est ergodique, l'espace I_T ne contient que des fonctions p.p. constantes. De plus,

$$\{f \in H \mid g \langle f, 1 \rangle = 0 \ \forall g \in I_T\} = \{f \in H \mid \int_X f d\mu = 0\},$$

car tout $g \in I_T$ est une fonction constante presque partout, et en particulier il existe $g \neq 0$ p.p. dans I_T . Ainsi, si $f \in I_T$, alors $\pi_T(f) = \langle f, 1 \rangle = \int_X f d\mu$. \square

Pour la suite de l'article, on définit l'application $S_N : \mathcal{L}^p(X) \rightarrow \mathcal{L}^p(X)$ par $S_N f(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(T^n x)$, pour tout $f \in \mathcal{L}^p(X)$ et tout $x \in X$.

Lemme 3.22. *S_N est une application contractante dans $\mathcal{L}^p(X)$. C'est-à-dire, si $f \in \mathcal{L}^p(X)$, alors $\|S_N f\|_p \leq \|f\|_p$.*

Démonstration. Le résultat découle simplement de l'inégalité du triangle et du lemme 3.17. \square

Reprenons l'hypothèse ergodique évoquée dans l'introduction : dans un système à l'équilibre, la valeur moyenne dans l'espace d'une grandeur est égale à la moyenne d'un très grand nombre de mesures effectuées dans le temps. Il existe une analogie évidente entre cette hypothèse et les résultats qui suivent. Considérons comme grandeur physique les fonctions de l'espace \mathcal{L}^2 (ou \mathcal{L}^1 dans le cas du théorème de Birkhoff), et interprétons le temps comme le nombre d'itérations de la transformation T . Soit $f \in \mathcal{L}^2$ (ou \mathcal{L}^1). La valeur moyenne dans l'espace correspond alors à l'intégrale de f par rapport à la mesure du système, tandis que la moyenne d'un grand nombre de mesures prises dans le temps est donnée par $S_N f(x)$, pour presque tout $x \in X$ et pour N grand.

Le résultat suivant est le premier résultat *ergodique* de l'article, au sens où un résultat est dit ergodique lorsqu'il concerne la convergence de $S_N f$ vers $\int_X f d\mu$.

Théorème 3.23. *Soit (X, \mathcal{B}, μ, T) un système préservant la mesure. Alors, pour chaque $f \in \mathcal{L}^2(X)$, on a $\|S_N f - \pi_T(f)\|_2 \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow \infty$.*

Démonstration. L'idée clé de la démonstration consiste à identifier le complément orthogonal I_T^\perp de I_T comme étant le sous-espace fermé engendré par les *cocycles*. Pour $g \in \mathcal{L}^2(X)$, on pose $\partial g = g - U_T g$ et on appelle ∂g le **cocycle** associé à g .

Soit M le sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}^2(X)$ engendré par les cocycles de $\mathcal{L}^2(X)$. Il est clair que $I_T \subset M^\perp$, car si $f \in I_T$, alors, d'après la partie *i*) du lemme 3.21, on a

$$\langle \partial g, f \rangle = \langle g - U_T g, f \rangle = \langle g, f \rangle - \langle U_T g, f \rangle = \langle g, f \rangle - \langle g, U_T^* f \rangle = 0.$$

Pour montrer que $M^\perp \subset I_T$, considérons $f \in M^\perp$. En particulier, $\langle \partial f, f \rangle = 0$, ce qui implique que

$$\begin{aligned} \|f - U_T f\|_2^2 &= \langle f, f - U_T f \rangle - \langle U_T f, f - U_T f \rangle \\ &= \|U_T f\|_2 - \langle U_T f, f \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $f = U_T f$ et $M^\perp \subset I_T$.

Nous savons que I_T est un sous-espace vectoriel fermé et que l'on a la décomposition orthogonale $\mathcal{L}^2(X) = I_T \oplus I_T^\perp$, où I_T^\perp est le sous-espace fermé engendré par les cocycles. En particulier, on peut montrer que pour tout $f \in \mathcal{L}^2(X)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $g, h \in \mathcal{L}^2(X)$ tels que $\|h\|_2 \leq \varepsilon$ et $f = \pi_T(f) + \partial g + h$. De plus, remarquons que pour tout $f \in \mathcal{L}^2(X)$, $S_N \pi_T(f) = \pi_T(f)$, car $\pi_T(f) \in I_T$.

Considérons $f \in \mathcal{L}^2(X)$ et $\varepsilon > 0$. Alors, il existe g et h comme précédemment et

$$\begin{aligned} \|S_N f - \pi_T(f)\|_2 &= \|S_N f - S_N \pi_T(f)\|_2 \\ &= \|S_N(f - \pi_T f)\|_2 \\ &= \|S_N(\partial g + h)\|_2 \\ &= \|S_N \partial g + S_N h\|_2 \\ &\leq \|S_N \partial g\|_2 + \|S_N h\|_2. \end{aligned}$$

Cependant, puisque S_N est une contraction, on a $\|S_N h\|_2 \leq \|h\|_2 \leq \varepsilon$. Il nous reste donc à vérifier que $\|S_N \partial g\|_2 \leq \frac{2}{N} \|g\|_2$:

$$\begin{aligned} \|S_N \partial g\|_2 &= \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (g \circ T^n - g \circ T^{n+1}) \right\|_2 \\ &= \left\| \frac{1}{N} (g - g \circ T + g \circ T - g \circ T^2 + \dots - g \circ T^N) \right\|_2 \\ &= \left\| \frac{1}{N} (g - U_T^N g) \right\|_2 \\ &\leq \frac{1}{N} (\|g\|_2 + \|U_T^N g\|_2) \\ &= \frac{2}{N} \|g\|_2. \end{aligned}$$

Alors, $\|S_N f - \pi_T(f)\|_2 \leq \frac{2}{N}\|g\|_2 + \varepsilon$. Ainsi, comme ε était arbitraire, $\|S_N f - \pi_T(f)\|_2 \rightarrow 0$ lorsque $N \rightarrow \infty$. \square

Le théorème précédent constitue une simple reformulation d'un résultat beaucoup plus connu.

Corollaire 3.24. [Théorème ergodique moyen de von Neumann][[Gre15], Théorème 4.2] *Supposons que (X, \mathcal{B}, μ, T) est un système ergodique. Alors, pour chaque $f \in \mathcal{L}^2(X)$, on a $S_N f \rightarrow \int_X f d\mu$ dans $\mathcal{L}^2(X)$ lorsque $N \rightarrow \infty$.*

Démonstration. Le résultat découle directement de la partie *ii*) du lemme 3.21 et du théorème précédent. \square

3.4 Théorème maximal ergodique

Cette sous-section est dédiée au théorème maximal ergodique. Le lecteur notera qu'il ne s'agit pas vraiment d'un théorème ergodique au sens strict, puisqu'il ne traite pas de la convergence de $S_N f$ vers $\int_X f d\mu$. En effet, dans ce théorème, on suppose seulement que le système préserve la mesure. Ce résultat reste cependant très important en théorie ergodique, notamment pour la démonstration du théorème ergodique de Birkhoff. Le lemme suivant est un cas particulier du lemme de recouvrement de Vitali.

Lemme 3.25. *Soit $\{I_m\}_{m \in S}$ une collection d'intervalles de la forme $I_m = [m, m + l(m)) \subset \mathbb{R}$ où S est un sous-ensemble fini de \mathbb{Z} et $l : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ est une application. Alors il existe une sous-collection disjointe $\{I_m\}_{m \in S'}$ telle que l'union des intervalles de la sous-collection a une longueur d'au moins $\frac{1}{2}|S|$.*

Démonstration. Soit $\{I_m \mid m \in S_*\}$ la sous-collection minimale ayant la propriété que $\bigcup_{m \in S_*} I_m = \bigcup_{m \in S} I_m$. On remarque qu'un point y ne peut pas appartenir à trois intervalles de la sous-collection minimale, car si c'était le cas, un des trois intervalles serait contenu dans les deux autres et la sous-collection minimale ne serait pas minimale. En écrivant $S_* = \{m_1 < m_2 < \dots < m_k\}$, on peut construire deux collections $C_1 = I_{m_1} \cup I_{m_3} \cup \dots$ et $C_2 = I_{m_2} \cup I_{m_4} \cup \dots$, qui sont constituées d'intervalles disjoints. Cependant, l'union de ces deux collections est égale à $\bigcup_{m \in S} I_m$ et donc contient S . Ainsi, au moins une de ces deux collections a une longueur d'au moins $\frac{1}{2}|S|$. \square

Théorème 3.26. [Théorème ergodique maximal][[Gre15], Proposition 5.1] *Soit (X, \mathcal{B}, μ, T) un système préservant la mesure. Supposons que $f \in \mathcal{L}^1(X)$ est telle que $\|f\|_1 \leq \varepsilon$. Soit $E \subset X$, l'ensemble des $x \in X$ pour lesquels il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|S_N f(x)| \geq \delta$. Alors E est mesurable et $\mu(E) \leq \frac{2\varepsilon}{\delta}$.*

Démonstration. Soient $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ et $f \in \mathcal{L}^1(X)$ telle que $\|f\|_1 \leq \varepsilon$. Posons $E(N_0) := \{x \in X \mid |S_N f(x)| \geq \delta \text{ pour un certain } N \leq N_0\}$, l'ensemble des $x \in X$ pour lesquels il existe $N \leq N_0$ tel que $|S_N f(x)| \geq \delta$. Le lecteur notera que la somme de fonctions mesurables est mesurable et que le module d'une fonction mesurable est également mesurable, ce qui implique que les ensembles

de la forme $\{x \in X \mid |f(x)| \geq c\}$ sont mesurables pour tout $c \in \mathbb{R}$ et pour toute fonction mesurable $f : X \rightarrow \mathbb{C}$. Par définition, $E(1) \subseteq E(2) \subseteq \dots \subseteq E$ et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} E(n) = E$. Soit $x \in E(N_0)$. Il existe alors $N(x) \leq N_0$ maximal tel que $|S_{N(x)} f(x)| \geq \delta$. En effectuant le changement d'indice $r = n + m$ pour m positif, on obtient :

$$\frac{1}{N(x)} \left| \sum_{r=m}^{N(x)+m-1} f(T^{r-m}x) \right| \geq \delta.$$

Ce qui implique que

$$\frac{1}{N(T^m x)} \left| \sum_{n=m}^{N(T^m x)+m-1} f(T^n x) \right| \geq \delta,$$

pour tout $x \in T^{-m}E(N_0)$.

Considérons $x \in X$ et notons $A(x)$ l'ensemble des $m \in \{0, \dots, N_1 - 1\}$, pour $N_1 \in \mathbb{N}$, tel que $x \in T^{-m}E(N_0)$. Donc pour $x \in X$ et $m \in A(x)$, on a :

$$\frac{1}{N(T^m x)} \left| \sum_{n=0}^{N(T^m x)-1} f(T^n(T^m x)) \right| \geq \delta.$$

Par construction, on sait que $N(T^m x) \in \{0, \dots, N_0\}$.

Maintenant, on a :

$$\int_X |A(x)| d\mu = \int_X \sum_{n=0}^{N_1-1} 1_{\{T^{-n}E(N_0)\}}(x) d\mu = \sum_{n=0}^{N_1-1} \mu(T^{-n}E(N_0)),$$

car $|A(x)| : X \rightarrow \mathbb{N}$ est l'application qui prend $x \in X$ et qui retourne la cardinalité de l'ensemble $A(x)$. De plus,

$$\sum_{n=0}^{N_1-1} \mu(T^{-n}E(N_0)) = \sum_{n=0}^{N_1-1} \mu(E(N_0)),$$

car T est une application préservant la mesure. En particulier, $\int_X |A(x)| d\mu = N_1 \mu(E(N_0))$.

Considérons $x \in X$ et la collection d'intervalles $\{I_m\}_{m \in A(x)}$, où $I_m = [m, m + N(T^m x))$. Par le lemme 3.25, on sait qu'il existe une sous-collection d'intervalles disjoints $\{I_m\}_{m \in A'(x)}$ telle que $\sum_{m \in A'(x)} |N(T^m x)| \geq \frac{1}{2} |A(x)|$, comme tous ces

intervalles sont contenus dans $[0, N_0 + N_1]$, on a :

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n=0}^{N_0+N_1} |f(T^n x)| \right| &\geq \left| \sum_{m \in A'(x)} \sum_{n=m}^{N(T^m x)+m-1} |f(T^n x)| \right| \\
&= \left| \sum_{m \in A'(x)} \frac{N(T^m x)}{N(T^m x)} \sum_{n=m}^{N(T^m x)+m-1} |f(T^n x)| \right| \\
&\geq \left| \sum_{m \in A'(x)} N(T^m x) \delta \right| \\
&\geq \frac{1}{2} \delta |A(x)|.
\end{aligned}$$

Donc

$$\int_X \left| \sum_{n=0}^{N_0+N_1} |f(T^n x)| \right| d\mu \geq \int_X \frac{1}{2} \delta |A(x)| d\mu = \frac{1}{2} \delta N_1 \mu(E(N_0)).$$

Cependant, d'après le lemme 3.17 et du fait que T préserve la mesure, on a :

$$\begin{aligned}
\int_X \left| \sum_{n=0}^{N_0+N_1} |f(T^n x)| \right| d\mu &= \int_X \sum_{n=0}^{N_0+N_1} |f(T^n x)| d\mu \\
&= (N_0 + N_1) \int_X |f| d\mu.
\end{aligned}$$

Alors,

$$(N_0 + N_1) \|f\|_1 \geq \frac{1}{2} N_1 \delta \mu(E(N_0)),$$

ce qui implique que

$$\mu(E(N_0)) \leq \frac{2\varepsilon}{\delta} \frac{N_0 + N_1}{N_1}.$$

Ainsi, comme $\frac{2\varepsilon}{\delta} \frac{N_0+N_1}{N_1} \rightarrow \frac{2\varepsilon}{\delta}$ lorsque $N_1 \rightarrow \infty$ et, par les propriétés élémentaires des mesures, $\mu(E(N_0)) \rightarrow \mu(E)$ lorsque $N_0 \rightarrow \infty$, on obtient bien $\mu(E) \leq \frac{2\varepsilon}{\delta}$. \square

3.5 Théorème ergodique de Birkhoff

Nous concluons cette introduction à la théorie ergodique par la présentation et la démonstration du théorème ergodique de Birkhoff. Ce théorème peut être vu comme une extension du théorème ergodique moyen de von Neumann. En effet, si l'on reprend la formulation de ce dernier en remplaçant $\mathcal{L}^2(X)$ par $\mathcal{L}^1(X)$ et la convergence en norme \mathcal{L}^2 de $S_N f$ vers $\int_X f d\mu$ par la convergence ponctuelle p.p. de $S_N f$ vers $\int_X f d\mu$, on obtient précisément le théorème ergodique de Birkhoff. Le lemme suivant nous sera utile pour contourner le fait que la convergence en norme \mathcal{L}^p n'implique pas, en général, la convergence ponctuelle p.p..

Lemme 3.27. Soient (X, \mathcal{B}, μ, T) est un système ergodique et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{L}^1(X)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f_n(x) = \int_X f_n d\mu$ p.p.. De plus, supposons que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en norme \mathcal{L}^1 vers f (c'est-à-dire $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_1 = 0$). Alors, $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x) = \int_X f d\mu$ p.p..

Démonstration. Soient $\varepsilon > 0$ et $0 < \delta < 4$. Choisissons n tel que $\|f_n - f\|_1 \leq \frac{1}{12}\varepsilon\delta$. Alors,

$$\|f_n - f\|_1 = \int_X |f_n - f| d\mu \geq \left| \int_X (f_n - f) d\mu \right| = \left| \int_X f_n d\mu - \int_X f d\mu \right|.$$

Donc $\left| \int_X f_n d\mu - \int_X f d\mu \right| \leq \frac{1}{12}\varepsilon\delta$. Soit A_M l'ensemble des $x \in X$ pour lesquels $|S_N f_n(x) - \int_X f_n d\mu| > \frac{1}{3}\varepsilon$ pour un certain $N \geq M$. Alors, $\bigcap_{M=1}^{\infty} A_M$ est contenu dans l'ensemble des $x \in X$ pour lesquels $S_N f_n(x) \not\rightarrow \int_X f_n d\mu$ et il est donc de mesure nulle. Notons que nous avons que $A_1 \supset A_2 \supset \dots$, alors $\mu(A_M) \rightarrow 0$ lorsque $M \rightarrow \infty$, ce qui implique qu'il existe un certain M^* tel que $\mu(A_{M^*}) \leq \frac{1}{2}\delta$. Alors, $|S_N f_n(x) - \int_X f_n(x) d\mu| \leq \frac{1}{3}\varepsilon$ pour $N \geq M^*$ et $x \notin A_{M^*}$. Maintenant, considérons B , l'ensemble des $x \in X$ pour lesquels il existe N tel que $|S_N f_n(x) - S_N f(x)| \geq \frac{1}{3}\varepsilon$. Alors, par le théorème ergodique maximal et un simple calcul, $\mu(B) \leq \frac{1}{2}\delta$. Donc pour $x \notin A_{M^*} \cup B$, ensemble de mesure inférieure à δ ,

$$\begin{aligned} \left| S_N f(x) - \int_X f d\mu \right| &\leq |S_N f(x) - S_N f_n(x)| + \left| S_N f_n(x) - \int_X f_n d\mu \right| \\ &\quad + \left| \int_X f_n d\mu - \int_X f d\mu \right| \\ &\leq \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{12}\delta\varepsilon \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

pour tout $N \geq M^*$. Le résultat est vrai pour tout x en dehors d'un ensemble de mesure δ . Comme δ est arbitraire, le résultat est vrai pour presque tout $x \in X$.

Pour finir, il reste à montrer que $\lim_{N \rightarrow \infty} |S_N f(x) - \int_X f d\mu|$ existe et qu'elle est nulle. On sait que $\limsup_{N \rightarrow \infty} |S_N f(x) - \int_X f d\mu|$ existe et donc par ce qui précède

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} |S_N f(x) - \int_X f d\mu| \leq \varepsilon$$

p.p.. Par la suite, considérons une suite $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que $\varepsilon_i < \varepsilon_j$ pour $j < i$ et $\varepsilon_i \rightarrow 0$ lorsque $i \rightarrow \infty$. Pour tout i et presque tout x ,

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} |S_N f(x) - \int_X f d\mu| \leq \varepsilon_i.$$

Puisque l'union dénombrable d'ensembles de mesure nulle est de mesure nulle, l'inégalité est vraie p.p. ce qui est vrai pour tout i simultanément. Donc pour presque tout $x \in X$,

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} |S_N f(x) - \int_X f d\mu| = 0.$$

Cependant, on sait que $\liminf_{N \rightarrow \infty} |S_N f(x) - \int_X f d\mu| \geq 0$, car $|S_N f(x) - \int_X f d\mu| \geq 0$ pour tout N . Donc

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} |S_N f(x) - \int_X f d\mu| = \limsup_{N \rightarrow \infty} |S_N f(x) - \int_X f d\mu|,$$

ce qui implique que $\lim_{N \rightarrow \infty} |S_N f(x) - \int_X f d\mu|$ existe et est nulle. Ainsi, on a $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x) = \int_X f d\mu$ p.p.. \square

Il est important de garder à l'esprit que nous travaillons avec des mesures type finie et donc que les conditions du théorème 3.9 sont vérifiées. En particulier, on a $\mathcal{L}^2(X) \subset \mathcal{L}^1(X)$.

Lemme 3.28. *Soit (X, \mathcal{B}, μ, T) est un système ergodique. Alors l'ensemble des fonctions qui s'écrivent comme une fonction constante plus un cocycle borné est dense dans $\mathcal{L}^1(X)$.*

Démonstration. Soient $\varepsilon > 0$ et $f \in \mathcal{L}^1(X)$. On sait que l'espace des fonctions simples est dense dans $\mathcal{L}^1(X)$, on peut donc supposer sans perte de généralité que $f = \sum_{i=0}^n c_i 1_{E_i}$, où $c_i \in \mathbb{C}$ pour tout $i \in I$ et E_i est un ensemble mesurable pour tout $i \in I$. Alors,

$$\begin{aligned} \int_X \left| \sum_{i=0}^n c_i 1_{E_i} \right|^2 d\mu &\leq \sum_{i=0}^n \int_X |c_i|^2 1_{E_i} d\mu \\ &= \sum_{i=0}^n |c_i|^2 \mu(E_i) \\ &\leq \infty. \end{aligned}$$

Donc $f \in \mathcal{L}^2(X)$; ce qui implique, par la démonstration du théorème 3.23, qu'il existe $g \in \mathcal{L}^2(X)$ telle que $\|f - \int_X f d\mu - \partial g\|_2 \leq \frac{1}{9}\varepsilon^2$. Par l'inégalité de Hölder, on a $\|f - \int_X f d\mu - \partial g\|_1 \leq \frac{1}{3}\varepsilon$. On a donc que les fonctions qui s'écrivent comme une fonction constante plus un cocycle sont denses dans $\mathcal{L}^1(X)$, car les fonctions simples sont denses dans $\mathcal{L}^1(X)$ et ε était arbitraire.

Maintenant, on aimerait montrer que le résultat est toujours vrai si on remplace le cocycle par un cocycle borné. Soit $g \in \mathcal{L}^2(X)$, alors $g \in \mathcal{L}^1(X)$ et on peut l'approximer par une fonction simple avec une précision arbitraire en norme \mathcal{L}^1 . De plus, avec une démonstration similaire à celle faite plus haut, on peut montrer que les fonctions simples sont bornées. Prenons $\bar{g} \in \mathcal{L}^\infty(X)$ tel que $\|g - \bar{g}\|_1 < \varepsilon$, alors par l'inégalité du triangle et le lemme 3.17, $\|\partial g - \partial \bar{g}\|_1 < \frac{2}{3}\varepsilon$. Donc par l'inégalité du triangle, on obtient que $\|f - \int_X f d\mu - \partial \bar{g}\|_1 \leq \varepsilon$. Ainsi, puisque ε était arbitraire, le résultat suit. \square

Théorème 3.29. [Théorème ergodique de Birkhoff] [[Gre15], Théorème 5.1] *Soient (X, \mathcal{B}, μ, T) un système ergodique et $f \in \mathcal{L}^1(X)$. Alors, $S_N f$ converge ponctuellement vers $\int_X f d\mu$ p.p..*

Démonstration. Supposons que $f = c + \partial g$, où c est une constante, $g \in \mathcal{L}^\infty(X)$ et $\partial g = g - U_T g$. Alors,

$$\begin{aligned} S_N f(x) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (c + \partial g)(T^n x) \\ &= \frac{1}{N} \left(\sum_{n=0}^{N-1} c + \sum_{n=0}^{N-1} \partial g(x) \right) \\ &= c + \frac{1}{N} (g(x) - g(T^N x)). \end{aligned}$$

Donc $S_N f(x) \rightarrow c$ lorsque $N \rightarrow \infty$. De plus,

$$\begin{aligned} \int_X f d\mu &= \int_X c + \partial g d\mu \\ &= \int_X c d\mu + \int_X g - g \circ T^n d\mu \\ &= c + \int_X g d\mu - \int_X g \circ T^n d\mu \\ &= c, \end{aligned}$$

car T préserve la mesure. Donc $S_N f(x) \rightarrow \int_X f d\mu$ p.p. lorsque $N \rightarrow \infty$. Ainsi, la démonstration se termine en invoquant le lemme 3.28 et le lemme 3.27. \square

Références

- [EW11] Manfred EINSIEDLER et Thomas WARD : *Ergodic Theory with a view towards Number Theory*. Springer, 2011.
- [Gal09] Thierry GALLAY : *Théorie de la mesure et de l'intégration*, 2009.
- [Gre15] Ben GREEN : *Ergodique theory*, 2015.
- [Kle13] A. KLENKE : *Probability Theory : A Comprehensive Course*. Universitext. Springer London, 2013.
- [Mor20] Sidney Allen MORRIS : *Topology without tears*, 2020.
- [Mus14] Joseph MUSCAT : *Functional Analysis An Introduction to Metric Spaces, Hilbert Spaces, and Banach Algebras*. Springer, 2014.
- [Ros06] J.S. ROSENTHAL : *First Look At Rigorous Probability Theory, A (2nd Edition)*. World Scientific Publishing Company, 2006.

TOMMY GIROUX
 DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
 Courriel: Tommy.Giroux@USherbrooke.ca

Entrevue avec le Professeur Ibrahim Assem

Marie-Pier Domingue, Klaus Herrmann, Vasilisa Shramchenko

Reçu le 2022-03-28 et accepté le 2026-04-15

RÉSUMÉ Ibrahim Assem est professeur émérite au département de mathématiques. Il a été professeur à l'Université de Sherbrooke de 1988 jusqu'à sa retraite en 2020. L'entrevue se déroula le 23 mars 2022 chez Ibrahim à Sherbrooke.

1 Début de carrière et formation initiale

1.1 Pourquoi les maths ?

Vasilisa: Pourquoi les maths ?

Ibrahim: Ma vocation était l'histoire. J'ai fait des maths parce que c'était moins dangereux que l'histoire sous un régime militaire qui récrivait l'histoire à sa façon, et n'était pas tendre envers ses opposants.

Vasilisa: As-tu été déçu de ne pas pouvoir faire de l'histoire et de devenir mathématicien ?

Ibrahim: Non.

Vasilisa: Comment ça a commencé pour toi ? Quand as-tu compris que tu aimais les maths ?

Ibrahim: J'ai découvert à l'école que j'étais bon pour résoudre des exercices de maths, et je m'intéressais (je m'intéresse toujours) au pourquoi des choses.

Vasilisa: As-tu déjà eu cette idée à l'école secondaire ou primaire ?

Ibrahim: Secondaire, car il fallait décider dans quelle faculté entrer et donc d'une future carrière. Primaire, non, je m'intéressais à l'époque à l'histoire et à la langue française.

Vasilisa: Mais tu aurais pu étudier la physique aussi, parce que la physique peut-être n'était pas censurée non plus par la dictature.

Ibrahim: Oui.

Vasilisa: Donc pourquoi as-tu choisi les maths. Les aimais-tu déjà à l'école ?

Ibrahim: Au départ, je ne savais pas si c'étaient les maths ou la physique qui m'intéresseraient le plus. Ce qui m'a décidé, ce sont les approximations - les physiciens font tout le temps des approximations. Ils coupent à certains termes considérés comme non significatifs, mais pour moi, c'était du n'importe quoi.

Vasilisa: Quelqu'un ou quelque chose t'a influencé et poussé vers les maths ?

Ibrahim: Oui. Un ami de mes grands-parents. Il était ingénieur. Il adorait les maths et m'en parlait tout le temps, dès l'enfance. J'étais au Lycée français, et dans le système français classique, les meilleurs étudiants faisaient des maths, ça valorisait. Je ne faisais pas partie des meilleurs, mais j'essayais.

Vasilisa: Quand as-tu compris que tu voulais en faire une carrière ?

Ibrahim: J'ai d'abord voulu être ingénieur et j'ai commencé par m'inscrire à la faculté de génie. Je n'ai pas aimé : quand quelque chose « marche », on ne veut pas savoir pourquoi. Nombre de fois, j'ai demandé à mes profs de me donner une preuve que ça marche, mais ils ne savaient pas.

Vasilisa: Mais ça marche quand même parce que les ponts en Égypte ne s'effondrent pas.

Ibrahim: Oui ça marche, mais ce n'est pas pour moi, je voulais savoir pourquoi et je n'avais pas de réponse ! En réaction, j'ai obliqué vers la faculté des sciences et fait des maths, et le plus loin possible des maths du génie. À ce moment-là, il était clair pour moi que ce serait ma carrière, puisque je ne voulais plus être ingénieur.

Vasilisa: Donc il y avait quelque chose avant l'université qui t'a poussé vers les maths et non pas vers la médecine ou la chimie ?

Ibrahim: Oui. C'était le système français, dans lequel les meilleurs éléments font des maths.

Vasilisa: D'accord, donc les meilleurs éléments ils font la médecine mais parmi ceux qui restent les meilleurs font les maths ?

Ibrahim: Non en Égypte, les meilleurs éléments font la médecine et dans le système français, les meilleurs éléments font les maths.

Vasilisa: Mais tu étais en Égypte pas en France !

Ibrahim: Oui, mais dans une école française. Et puis, je voulais faire quelque chose qui me plaisait et les maths me plaisaient après l'histoire et le français.

Vasilisa: Pourquoi l'histoire te plaisait ?

Ibrahim: L'histoire était valorisée dans ma famille.

Vasilisa: Est-ce qu'un de tes parents était historien ?

Ibrahim: Mon père était comptable et ma mère femme au foyer (nécessaire à cette époque) mais elle lisait beaucoup d'histoire.

Vasilisa: Avais-tu d'autres intérêts pendant ta jeunesse ?

Ibrahim: Bien sûr. Littérature. Histoire. Cinéma. Politique. Philosophie. Rock'n'roll.

Vasilisa: De quoi l'école où tu as grandi a-t-elle l'air ?

Ibrahim: Le Lycée Français d'Alexandrie était une bonne école du temps des Français. Il a été nationalisé pendant la guerre d'Algérie en soutien aux nationalistes algériens. Ça a fait baisser le niveau. Il n'était plus question de comprendre et encore moins de discuter, il fallait apprendre par cœur et répéter sans penser (le mot arabe pour étudier est le même que celui pour mémoriser, ça veut dire

quelque chose, ça !). Moi et ma classe avions eu un avant-goût du système français et de l'éducation occidentale, et donc, malgré tout, nous nous en sommes bien tirés. La preuve, nous sommes tous arrivés à des postes respectables.

1.2 Formation universitaire

Vasilisa: Et l'université ?

Ibrahim: C'était essentiellement pareil. Le prof avait un cahier où ses cours étaient écrits, et chaque année il les dictait sans changer une virgule. On appelait ça un « kachkoul » (arabisation du mot français cache-col). Aux examens, on posait des questions de cours tirées du kachkoul et il fallait que les étudiants restituent les réponses par cœur. Le plus surprenant est que beaucoup d'étudiants, mes camarades, y compris ceux qui n'avaient pas été éduqués à l'occidentale, étaient très bons. J'ai gardé une grande estime pour eux. Le problème n'est pas l'étudiant égyptien, mais le système dans lequel on le fait grandir.

Vasilisa: Comment as-tu aimé cela ?

Ibrahim: Je n'ai pas aimé. Par exemple, dans un cours d'analyse fonctionnelle, le professeur dictait de son kachkoul, et moi je prenais un livre d'analyse fonctionnelle et je commençais à travailler dedans seul à ma façon. On trouvait des livres de maths français et anglais en Égypte.

Vasilisa: Est-ce que tu apprenais en français ou en arabe ?

Ibrahim: Ça, c'est une autre question. Théoriquement, en arabe. Seulement il y a des problèmes, tu ne peux pas écrire des équations en arabe. Alors officiellement, le cours est en anglais, le professeur dicte en anglais avec un accent à couper au couteau et toi tu es supposé répondre en anglais mais les discussions se faisaient en arabe. Si par exemple, je posais une question au professeur (ils me détestaient car j'étais parmi ceux qui posaient toujours des questions), je la posais en arabe, il me répondait en arabe.

Vasilisa: Est-ce qu'ils répondaient bien même si la réponse n'était pas écrite dans son kachkoul ?

Ibrahim: Ce n'étaient pas des mauvais mathématiciens et la plupart de mes camarades égyptiens étaient de très grande valeur. Les profs aussi étaient capables mais ils n'ont pas eu la possibilité de le prouver. C'est dommage qu'ils se soient trouvés dans un système qui ne leur a pas permis de se développer. Je me souviens qu'un jour, j'étais dans le bureau d'un prof qui était dans la société mathématique égyptienne, il discutait avec deux de ses collègues quelle était la définition d'un mathématicien. Ils sont arrivés à la suivante : un mathématicien est une personne qui a publié deux articles dans sa vie. Je n'ai pas pu m'empêcher d'ouvrir la bouche et de dire que c'est très bureaucratique comme définition !

Vasilisa: Pourquoi bureaucratique ?

Ibrahim: Tu comptes le nombre d'articles. Dans ma tête ce n'était pas ça les maths ! Pour moi les maths, c'était la poésie, l'amour ! Et il m'a répondu -

quelle autre définition proposes-tu ? Il avait raison, du point de vue d'une société mathématique, il fallait une définition bureaucratique.

Vasilisa: Toi, peux-tu définir un mathématicien ?

Ibrahim: Quand je vois un mathématicien, je sais qu'il l'est. Je ne peux pas te le dire à partir du nombre d'articles publiés.

Vasilisa: Est-ce que quelqu'un peut ne pas être mathématicien après avoir publié deux articles ?

Ibrahim: Je ne sais pas, je dis que je reconnais un mathématicien quand j'en vois un. C'est tout.

Vasilisa: Peux-tu reconnaître un mathématicien avant qu'il n'ait publié d'articles ?

Ibrahim: Oui, des étudiants. Parmi mes étudiants, je crois avoir repéré ceux qui étaient capables.

Vasilisa: Tu as gradué de l'université d'Alexandrie en 1977. Avant de conclure sur ce sujet, j'aimerais que tu nous parles de la promotion d'Ibrahims.

Ibrahim: À la faculté de génie, la liste d'étudiants était faite dans l'ordre alphabétique des prénoms. À l'époque, environ 1400 étudiants entraient en première année. Ibrahim commence par la première lettre de l'alphabet arabe. Donc il y avait une classe et demie d'Ibrahims, mais ça ce n'est rien - les Mohammeds c'était quatre ou cinq classes.

Vasilisa: Cinq classes de Mohammeds ! Une classe c'était combien de gens ?

Ibrahim: À peu près une quarantaine. C'était très supportable sauf que si le professeur avait envie d'appeler Ibrahim toute la classe répondait.

Vasilisa: Comment faisaient les profs ?

Ibrahim: Ils appelaient par le nom de famille évidemment !

1.3 Doctorat à Carleton

Vasilisa: Comment as-tu eu l'idée d'aller au Canada ?

Ibrahim: Par pragmatisme. Je voulais aller en France ou en Suisse (j'avais entendu parler de Pierre Gabriel et voulais travailler avec lui). Mais Français et Suisses accordaient leurs bourses au pays, c'est-à-dire au gouvernement, qui les distribuait aux fils de ministres ou d'officiers supérieurs. Je ne voulais pas entendre parler des États-Unis. Les universités canadiennes offraient des bourses personnelles, donc sans passer par le gouvernement, et le Canada se présentait à l'étranger comme un pays bilingue (oui, j'ai été naïf de le croire).

Vasilisa: Comment as-tu trouvé un programme d'études ?

Ibrahim: Un mathématicien hongrois nommé Richard Wiegandt, en visite à Alexandrie, m'avait parlé de Vlastimil Dlab, qui a été mon directeur de recherches.

Vasilisa: Tu as présenté une demande au gouvernement du Canada ?

Ibrahim: Non, à l'université Carleton¹. Entre autres universités. J'ai même présenté une demande d'admission à Sherbrooke. J'ai présenté plusieurs demandes et j'ai accepté l'offre de Carleton parce qu'elle me donnait plus d'argent qu'ailleurs. J'ai eu d'autres offres dont je ne me souviens plus. Même Sherbrooke m'a offert une bourse, mais c'était beaucoup moins.

Vasilisa: Même la langue française ne t'a pas attiré à Sherbrooke ?

Ibrahim: Mais dans ma tête, le Canada était bilingue ! Ah, j'étais stupide, romantique ! Je suis donc allé à Carleton, parce que je ne savais pas pourquoi ma bourse était si élevée.

Vasilisa: Parce que là le coût de vie était élevé ?

Ibrahim: Non, le coût de vie était pareil à Sherbrooke. C'était l'année où l'Ontario a commencé à appliquer les frais différentiels pour les étudiants étrangers. Quand je suis arrivé et qu'ils m'ont dit ce que je devais payer comme frais de scolarité, je suis tombé à la renverse... Mais j'ai survécu.

Vasilisa: As-tu aimé ton expérience dès le début ?

Ibrahim: Non, j'étais au Canada anglais et je n'ai pas aimé du tout. Jusqu'à présent d'ailleurs.

Vasilisa: Avais-tu un « choc culturel » ?

Ibrahim: Indéniablement. J'avais voyagé en Europe et m'attendais à trouver un pays qui y ressemble. Ce n'était pas le cas. Maintenant, avec la mondialisation, les deux rives de l'Atlantique ont tendance à se rapprocher, mais à l'époque, le Canada anglais était vraiment très nord-américain et différent de l'Europe.

Vasilisa: Devais-tu t'adapter à quelque chose en particulier ?

Ibrahim: La mentalité anglo-canadienne. Le racisme anti-français et anti-québécois.

Vasilisa: Mais toi tu n'étais ni français ni québécois.

Ibrahim: Mais j'étais francophone, je me sentais insulté à longueur de journée.

Vasilisa: Comme francophone ? pas comme arabe ?

Ibrahim: Non pas comme arabe. Arabe, c'est autre chose ça c'est ce que j'appelle la ghettoïsation : selon moi, le multiculturalisme canadien est en réalité une ghettoïsation des minorités. En disant « je respecte ta culture », on veut dire « ta culture n'est pas la mienne », ou plus clairement « toi c'est toi et moi c'est moi ». C'est un mur que je n'ai jamais réussi à traverser pendant mes années au Canada anglais. Tout le monde est super gentil et sociable, mais...

Vasilisa: Voulais-tu le franchir ?

Ibrahim: Oui je voulais le franchir, je voulais avoir des amis canadiens anglais. Je n'en ai pas eu.

Vasilisa: Avais-tu des amis quand même ?

¹Université Carleton, Ottawa, Ontario, Canada.

Ibrahim: Francophones, franco-ontariens, québécois ou autres. J'ai eu assez d'amis quand même.

Vasilisa: Revenons aux maths. Tu es à Ottawa, à l'université Carleton, en doctorat avec Vlastimil Dlab. Comment as-tu trouvé ça ?

Ibrahim: J'avais de mauvaises relations avec mon environnement - je ne pouvais pas supporter l'arrogance intellectuelle, le carriérisme effréné et la pauvreté culturelle des profs d'université. Je ne pouvais pas supporter le mépris avec lequel ils traitaient leurs étudiants. Un des professeurs m'a déclaré que pour lui la plupart des étudiants qui entrent au premier cycle en maths sont des médiocres. Je trouvais ça insultant, il faut une certaine confiance de la part de l'étudiant pour aller dans une université. Et en réponse les profs te traitent de médiocre. S'il y a une chose que je me suis juré et que je crois avoir réussi, c'est de ne pas me comporter comme eux et d'essayer d'être proche de mes étudiants. Il y avait deux professeurs avec qui je m'entendais bien. C'était un Espagnol qui s'appelait Luis Ribes qui travaillait en théories des groupes. Il y avait aussi un Français d'Alexandrie, Maurice Chacron, très sympathique.

Vasilisa: Comment as-tu choisi l'algèbre ? Y avait-il quelqu'un ou quelque chose qui a motivé ce choix ?

Ibrahim: Mon sujet de maîtrise en Égypte était un problème de topologie algébrique. Quand j'ai travaillé dessus, je me suis rendu compte que la « bonne » approche était catégorique. C'est ce que j'ai fait, et à ma grande surprise, ça a marché. J'ai publié trois articles à partir de là. Mon directeur de thèse au doctorat était algébriste et m'a dirigé vers la théorie des représentations des algèbres. J'ai mis du temps à me sentir bien dans ce domaine, mais maintenant je pense que c'était un bon choix, ça s'adapte bien à ma façon de penser.

Vasilisa: Ton directeur de thèse était-il ton mentor aussi, était-il une personne qui t'a encouragé, motivé, a eu confiance en toi ?

Ibrahim: Non, au contraire, et j'aime mieux ne pas parler de ça. Là aussi, j'ai essayé avec mes étudiants de prendre le contrepied de cette attitude. D'autres personnes m'ont encouragé et aidé, et je leur en suis reconnaissant.

Vasilisa: Y avait-il d'autres domaines des maths qui t'intéressaient ?

Ibrahim: Plein ! La topologie algébrique, l'analyse fonctionnelle, l'analyse complexe, la théorie de la mesure et tant d'autres....

Vasilisa: Parle-nous de ton expérience de thèse, des défis, des réussites, des déceptions, peut-être.

Ibrahim: Mon directeur m'a dirigé vers les représentations, mais ne m'a pas suggéré de problème ni indiqué de lectures pertinentes. Ce que je suis, je le dois à un postdoc allemand, Dieter Happel, qui a passé un an à Carleton et qui a depuis fait une belle carrière. Lui m'a fait lire ce qu'il fallait. En discutant, nous avons construit une nouvelle classe d'algèbres qui s'est avérée importante. Nous avons écrit un article conjoint. Plus important, il m'a fait aimer le domaine. Après son départ, j'ai trouvé seul des nouveaux problèmes, et j'ai pu les résoudre. C'était

ça ma thèse.

Vasilisa: Est-ce que tu avais des craintes, des angoisses au début, comme celle de ne pas terminer ta thèse ?



Ibrahim, Claus Ringel (au centre) et José Antonio De la Peña (à droite), décembre 2010. « Miniconference on Self-Injective Algebras », colloque organisé à l'occasion du 60e anniversaire de Andrzej Skowroński, Toruń, Pologne.

Ibrahim: Quand mon directeur ne répondait pas à mes questions, au bout de quelques temps je commençais à me poser des questions, oui. Je voulais terminer ma thèse, bien sûr, mais ce n'était pas juste pour avoir le papier, je voulais vraiment apprendre. Apprendre à prouver, mais aussi apprendre les maths. Apprendre à parler les maths, apprendre à présenter les maths, apprendre à faire les maths, quoi ! Rien ne se passait. La première personne qui m'a aidé c'est Happel.

Vasilisa: Te souviens-tu du moment où tu as commencé à avoir la confiance que tu allais terminer, ce moment où tu te dis - j'ai prouvé quelque chose, j'ai trouvé quelque chose !

Ibrahim: Non, je n'avais pas confiance. D'ailleurs, même aujourd'hui, je n'ai pas confiance !

Vasilisa: Peut-être n'avais-tu pas une confiance absolue mais tu as commencé à avoir plus de confiance. Quand as-tu commencé à dire : « Ah voilà je peux faire des maths ! »

Ibrahim: Ce n'était pas un saut quantique. Peut-être une montée insensible. À un moment, j'ai eu plus de confiance qu'avant. Mais même aujourd'hui, chaque fois que je finis un article, je n'ai pas confiance que je peux faire un autre.

Vasilisa: Et qui t'a dit : « voilà maintenant tu peux soutenir ta thèse ? »

Ibrahim: Mon directeur. Quand il a vu que j'avais un article conjoint avec Happel, et un article tout seul, il a dit « tu peux soutenir » .

Vasilisa: Qu'as-tu ressenti à ce moment ?

Ibrahim: Rien de particulier. Je savais que c'était le cas.

Vasilisa: Et quand tu as eu ton doctorat, qu'est-ce que tu as ressenti ? Qu'est-ce que ça t'a apporté de plus ?

Ibrahim: Le soir de ma soutenance, je suis allé dans un bar à vins à Ottawa avec mon examinateur externe Claus Ringel et Dieter Happel, qui était de passage. J'ai terminé complètement saoul et suis allé après le bar chez ma copine, qui a été ma femme par la suite, pour lui dire comment ça s'était passé. Je n'étais pas capable de prendre un autobus, alors j'ai marché. J'ai marché dans la bonne

direction mais, tu vois, avec beaucoup d'approximations. Et quand je suis entré chez elle, elle était inquiète, elle voulait savoir si j'étais docteur, - moi, je suis tombé par terre.

Vasilisa: Où as-tu rencontré ta femme, est-ce que c'est pendant ton doctorat ?

Ibrahim: Oui, elle était mon prof d'espagnol.

Vasilisa: Pourquoi voulais-tu apprendre l'espagnol, tu n'avais pas assez de travail dans ton école graduée ?

Ibrahim: Parce que j'ai toujours voulu apprendre l'espagnol. Donc j'ai décidé de prendre des cours d'espagnol à Ottawa et j'ai rencontré ma femme.

Vasilisa: Elle n'est pas venue voir ta soutenance ?

Ibrahim: Non. J'étais très nerveux, je ne voulais pas qu'on me voie nerveux. Je savais que j'avais des résultats pour soutenir mais je ne savais pas comment j'allais répondre aux questions. Happel, c'est quand même quelqu'un, donc je m'attendais à ce qu'il pose des questions difficiles.

Vasilisa: Est-ce qu'il a posé des questions difficiles ?

Ibrahim: En fait, il était très content de mon travail.

Vasilisa: Est-ce que tu as su répondre à toutes les questions ?

Ibrahim: Pas toutes. C'est normal, je crois. On ne peut pas s'attendre à répondre à tout.

Vasilisa: Donc tu avais déjà deux publications avant la soutenance ?

Ibrahim: Plus trois issues de ma maîtrise, et j'étais en train de préparer une de plus. Mathématiquement, j'étais correct, mais ça ne m'a pas empêché d'être nerveux.

2 Carrière académique

2.1 Stage postdoctoral

Vasilisa: Savais-tu quoi faire après ta soutenance ?

Ibrahim: Oui. Dlab m'a gardé pour quelques mois en postdoc en attendant que je trouve autre chose. Je n'étais pas très bien payé mais j'avais un endroit. Je cherchais des postdocs et au départ je n'en ai pas trouvé. En revanche, j'ai trouvé un poste temporaire à l'université d'Ottawa, un poste d'enseignement et recherche, mais temporaire. J'y suis resté deux ans, il y a eu des postes permanents qui se sont ouverts pendant cette période mais je ne les ai pas eus. J'ai fait mon postdoc en tant que boursier Humboldt² en Allemagne, à Bielefeld. Dieter Happel y était basé, et Claus Ringel, mon superviseur, appréciait mes travaux. Mais les choses ne se passent jamais comme on pense. Arrivé là-bas, mon voisin de bureau était un Polonais à la forte personnalité qui s'appelait Andrzej Skowroński, lui aussi postdoc. Nous avons sympathisé et rédigé ensemble sept

²Fondation Alexandre von Humboldt

articles en deux ans contenant toute la théorie des représentations d'une classe d'algèbres. Claus Ringel appelait ça notre « machine à théorèmes ». Andrzej est resté un bon ami et un collaborateur proche jusqu'à sa mort de la covid il y a un an et demi. Paradoxalement, je n'ai eu l'occasion de travailler ni avec Happel, ni avec Ringel pendant cette période. J'ai écrit par la suite d'autres articles avec Happel, décédé du cancer il y a quelques années. Quant à Ringel, nous sommes restés en contact même après sa retraite et jusqu'à l'an dernier.



Ibrahim et Andrzej Skowroński, décembre 2010. « Miniconference on Self-Injective Algebras », colloque organisé à l'occasion du 60e anniversaire de Andrzej Skowroński, Toruń, Pologne.

demandes de bourse dans des universités canadiennes. Je savais que c'était une université francophone et je connaissais sa position géographique. J'avais entendu parler d'un nommé Gilles Fournier, qui était très respecté, et que j'ai eu plaisir à connaître personnellement plus tard.

Vasilisa: Comment as-tu trouvé Sherbrooke et le département ?

Ibrahim: Sherbrooke, j'adorais, c'était français, c'était québécois, enfin j'étais à l'aise.

Vasilisa: Mais outre la langue qu'est-ce qu'il y avait de bien ?

Ibrahim: De beaux arbres !

Vasilisa: Il n'y avait pas d'arbres à Ottawa ?

Ibrahim: Oui il y en avait à Ottawa. Mais tu as vu la forêt en Estrie en octobre, de quoi elle a l'air ? Tu ne trouves pareil nulle part au monde. Ottawa est une grande ville, il y a beaucoup moins d'arbres qu'ici, c'est beaucoup moins vert. Je suis heureux de vivre ici.

Vasilisa: Mais après tu es revenu au Canada. Pourquoi ?

Ibrahim: Parce que j'avais trouvé un poste, j'étais canadien et ma femme était canadienne. J'ai postulé sur des postes au Canada. J'ai eu un poste à l'université Carleton à Ottawa et encore une fois j'ai détesté là-bas donc j'ai été très heureux d'obtenir le poste à Sherbrooke. Ce qui était amusant, c'est que mes collègues à Ottawa ne comprenaient pas pourquoi j'allais à Sherbrooke. Ma réponse était que j'étais francophone.

2.2 Poste à l'Université de Sherbrooke

Vasilisa: Comment as-tu entendu parler de Sherbrooke ?

Ibrahim: J'en avais entendu parler depuis l'Égypte, quand je faisais mes

Vasilisa: Et le département, comment tu l'as trouvé ?

Ibrahim: C'était un département de mathématiques et d'informatique, le DMI. Les mathématiciens étaient en minorité.

Vasilisa: Est-ce que tu sais quand le DMI a été créé ?

Ibrahim: Au départ, c'était un département de maths seulement, sans informatique à l'époque. Il comprenait aussi des didacticiens des maths, qui, paraît-il, étaient très bons. Ces gens-là sont partis en faculté d'éducation. À ce moment-là, le département a commencé à embaucher des informaticiens pensant que ça allait « booster » les mathématiques. Au départ ça a boosté, oui. L'informatique et les mathématiques ont beaucoup de points communs, mais au bout d'un certain temps, les informaticiens ont pris plus de place.

Vasilisa: Quels sont les collègues qui t'ont embauché, qui travaillaient avec toi dès ton arrivée ?

Ibrahim: Tu les connais, ce sont Pierre-Yves Leduc alors vice-doyen, Jacques Dubois, directeur, Bernard Courteau, et Julien Constantin.

Vasilisa: Quels étaient les domaines de recherche/d'enseignement représentés au DMI ?

Ibrahim: En maths il y avait quatre : théorie des codes, analyse, recherche opérationnelle, et stats.

Vasilisa: Comment ça a connecté avec tes propres intérêts ?

Ibrahim: En principe, j'étais supposé rejoindre le groupe de théorie des codes, mais j'ai préféré continuer dans mon propre domaine et créer ma propre équipe.

Vasilisa: Combien il y avait de mathématiciens ?

Ibrahim: Au départ une vingtaine, la moitié du DMI. Mais si un mathématicien ne faisait plus de recherche, on coupait son poste quand il partait à la retraite. Donc les mathématiciens ont baissé en nombre. Certains se battaient pour que les postes en maths soient transférés en informatique, pour au moins les garder au département. Bien entendu pour moi, un mathématicien, ça ne m'arrangeait pas. Ce qui nous a sauvé c'est la crise financière de la faculté. Alors le doyen Jean Goulet a séparé les départements. Je dirais que c'est lui qui a sauvé les maths à Sherbrooke. Merci, Jean.

Vasilisa: Vous vouliez vous séparer à cause de la crise financière ?

Ibrahim: Pas nous, les informaticiens voulaient se débarrasser de nous. Jean a pensé que les mathématiciens pouvaient vivre seuls. Il a eu raison, c'est lui qui nous a sauvés.

Vasilisa: Mais étant donné qu'on a terminé avec 12 postes, ça veut dire que 12 personnes sur les vingt faisaient de la recherche.

Ibrahim: Ce n'est pas aussi simple que ça parce que Pierre-Yves Leduc s'est vraiment battu quand il a été directeur pour conserver les postes en math. Il a réussi. Éric Marchand aussi s'est battu. Ils ont réussi à conserver des postes, et ce n'était pas évident.

Vasilisa: Était-ce à ton initiative qu'on a embauché Shiping³ et Thomas⁴ ?

Ibrahim: Oui, et c'était très difficile à l'époque. Constantin m'a dit qu'il allait prendre sa retraite dans deux ans d'où la possibilité d'avoir un poste par anticipation. On a discuté qui pouvait être candidat, j'ai nommé Shiping. Je savais qu'il était très bon, je discutais avec lui par courriel et avec sa directrice de recherche et elle m'a dit qu'il serait disposé. Ça a marché. Avec Thomas, c'était différent. À l'époque, la direction du DMI ne voulait pas entendre parler de maths. Leduc était doyen. On s'est demandé quoi faire pour renforcer les maths. Créer une Chaire ? Comme il n'y avait pas de Chaires de Recherche du Canada disponible pour les maths, on a créé une chaire universitaire conjointe Sherbrooke-Bishop's. On a demandé et on a obtenu.

Vasilisa: Combien y avait-il d'étudiants en mathématiques, en première année ?

Ibrahim: À cette époque, la 1ère année était conjointe, maths + BES maths. Donc entre 40 et 50.

Vasilisa: Est-ce que les cours d'algèbre se donnaient déjà ou est-ce que c'était à toi à les introduire ?

Ibrahim: Au premier cycle, tous se donnaient déjà. Certains ont changé de contenu, d'autres ont disparu. Par exemple, un cours sur les structures ordonnées. Le cours de théorie des corps était obligatoire, maintenant il est optionnel (et ne se donne pratiquement plus). Le seul cours que j'ai introduit est un cours gradué, celui de Représentations des Algèbres MAT821.

Vasilisa: Le programme du bac en maths était-il très différent de ce qu'on connaît maintenant ?

Ibrahim: Non, pas très différent, mais il y avait davantage de cours de maths pures, surtout en analyse, qui était le point fort du département.

Vasilisa: Tu as eu beaucoup d'étudiants. Qu'est-ce que c'est pour toi ? Pourquoi aimes-tu les diriger ?

Ibrahim: Parce que ce sont des gens bien. J'ai trouvé des gens très bien à Sherbrooke. La qualité humaine des étudiants que j'ai eus est incroyable. C'est grâce à eux que j'ai eu une bonne carrière et que j'en ai été content. La qualité humaine des étudiants de premier cycle aussi, pas seulement des étudiants gradués.

Vasilisa: As-tu eu des étudiants rencontrés au début de ta carrière avec qui tu es demeuré ami ?

Ibrahim: Bien sûr, tu connais Juan Carlos Bustamante, Jessica Lévesque, et Diane Castonguay.

Vasilisa: Que fais-tu pour encourager des étudiant.e.s à faire des mathématiques ? Que leur dis-tu ?

Ibrahim: Ça vient naturellement. Ça dépend de la personne à qui tu parles et des circonstances aussi.

³Shiping Liu

⁴Thomas Brüstle

Vasilisa: Véronique⁵ par exemple. Qu'as-tu dit à Véronique pour la convaincre ?

Ibrahim: Depuis le premier jour, j'ai vu que c'était quelqu'un. Depuis la 1ère session, elle savait que je voulais qu'elle rentre en maîtrise de maths (elle était au BES).

Vasilisa: Mais maintenant elle est post doctorante⁶.

Ibrahim: Maintenant oui, mais dès la première session, dans toute la classe, je ne voyais qu'elle, mathématiquement. Je savais qu'elle était bonne, je ne sais pas comment expliquer, j'avais cette sensation, peut-être sa façon de me regarder. Pourtant le même groupe contenait d'autres bons étudiants. Je me souviens une fois, il y avait une party d'étudiants de maths où ils avaient invité certains du BES, dont Véronique. Je me souviens d'avoir commencé à parler de maîtrise à un étudiant, il a répondu « Mais moi je suis pas assez bon pour faire une maîtrise, pourquoi ne demandez-vous pas à cette fille-là [Véronique] ? » J'ai répondu : « Cette fille-là, je suis derrière elle depuis sa première session ! » Véronique a ri.



Ibrahim et Véronique Bazier-Matte en 2012. Réunion de travail, Sherbrooke, Québec, Canada.

Vasilisa: Quelle est la chose qui te donne le sentiment d'être fier dans ta carrière ? Plus globalement - de ton service, de ton travail comme éditeur, de l'impact que tu as eu sur plusieurs aspects de la vie d'un professeur, qu'aimes-tu à propos de ton apport à Sherbrooke ?

Ibrahim: La chose qui m'importe le plus, ça a été les étudiants, la confiance qu'ils m'ont accordée. C'est ce dont je suis le plus fier - autant de jeunes de très grande valeur. Ce ne sont pas juste ceux qui ont continué à faire des maths.

Vasilisa: Qu'est-ce que tu penses qu'on apporte aux étudiants qui ne

continuent pas en maths, mais qui finissent le bac en maths ?

Ibrahim: Je me fiche du papier. Ce que nous leur apportons, c'est une façon de voir les choses. Qu'il faut prouver les résultats, qu'il faut penser logiquement, c'est le but que j'ai toujours essayé d'atteindre.

Vasilisa: Est-ce que tu peux nommer un événement comique de ta carrière ?

Ibrahim: Ce que je dis à mes étudiants quand je rentre en classe, c'est que mon cours va être très difficile et qu'ils vont tous mourir.

Vasilisa: C'est ce que tu dis aux étudiants quand tu entres en classe le premier jour ?

⁵Véronique Bazier-Matte

⁶Mise à jour : professeure à l'Université Laval, Québec, Québec, Canada, depuis 2022.

Ibrahim: Et à chaque jour je répète - vous allez mourir, l'examen sera très dur, vous mourrez tous, écrivez votre testament, je dis ça tout le temps. Il y avait un groupe, une fois je suis rentré en classe, j'ai trouvé une corde de pendu au plafond. On a beaucoup ri.

Vasilisa: Est-ce que tu as eu d'autres réactions mémorables de tes étudiants envers ton enseignement ? Je pense qu'il y avait un groupe qui t'a donné une bouteille de vin en cadeau.

Ibrahim: Oui, j'ai récolté plusieurs bouteilles de vin. J'en ai même bu en classe.

2.3 Retraite

Vasilisa: Tu as pris ta retraite en 2021. Penses-tu que ton meilleur théorème est déjà fait ou pas ?

Ibrahim: Bien sûr ! Ça fait un an que je ne publie rien. Tu ne sais pas à quel point je suis moins motivé maintenant que la covid m'a coupé de mes discussions mathématiques journalières. On parle maths dans les couloirs même de choses simples, comme une intégrale ou tel cours à donner etc. Ça maintient la motivation. J'essaie de dire que, pour moi, l'enseignement et la recherche c'est une seule chose, la recherche c'est continuer l'enseignement des maths et l'enseignement est celui des maths vivantes, celles qui se font. Beaucoup de trucs que nous enseignons viennent des maths de grand-papa, mais la façon dont nous les enseignons est moderne, malgré nous, parce que nous sommes des mathématiciens modernes.

Vasilisa: Oui mais quand même ce n'est pas la recherche.

Ibrahim: Non, ce n'est pas la recherche, mais c'est la façon de penser qui compte pour moi. Je l'ai dit depuis le début de notre discussion, et je reviens toujours à cette question : pour moi les mathématiques c'est la pensée, comme la philosophie.

Vasilisa: Penses-tu que la pensée mathématique et la pensée philosophique sont la même chose ?

Ibrahim: Non, je pense que les deux sont des composantes de la pensée, point.

Vasilisa: Et l'histoire est-ce de la pensée aussi ?

Ibrahim: L'histoire est très différente des maths. En mathématiques, tu penses à quelque chose que tu crées, que tu inventes. En histoire, tu dois restituer quelque chose qui s'est passé. C'est très différent.

Vasilisa: Donc tu penses qu'on ne découvre pas les maths mais qu'on les crée ?

Ibrahim: On crée les maths. Au moins pour moi, c'est clair. C'est une création humaine.

Vasilisa: Quels sont tes projets pour la retraite ? Comment l'imagines-tu ?

Ibrahim: Prendre un daïquiri assis sur un transat en face de la mer des Caraïbes.

Vasilisa: Toute la journée ?

Ibrahim: Peut-être parfois, changer pour un piña colada. Je plaisante. Mes projets immédiats sont de finir les deux livres que j'écris, dont un de maths, et en plus, « on » m'a suggéré, entre guillemets, d'écrire un livre sur Charles d'Anjou, roi de Sicile. Donc je vais peut-être écrire ce livre-là. Je veux continuer à écrire des maths et de l'histoire mais en français, et que mes livres aient un impact. Je veux apprendre l'italien, perfectionner mon castillan, réapprendre l'anglais British.

Vasilisa: Pourquoi veux-tu apprendre l'anglais British ?

Ibrahim: Parce que j'aime l'Angleterre, c'est un beau pays.

Vasilisa: Qu'est-ce qu'il y a de beau-là ?

Ibrahim: Le cheddar, les salamis et le rosbif du dimanche. La porcelaine Royal Doulton avec des petits lapins- j'avais ça quand j'étais enfant. La Horseguard. Quand je vois au cinéma ces messieurs qui se promènent avec chapeau melon et parapluie, je trouve ça génial. Continuons avec mes projets. Je veux visiter les châteaux des croisés en Grèce. C'est un projet à moi qui a été stoppé par la pandémie. Et mon rêve, c'est de souper au Celler de Can Roca, le meilleur restaurant d'Europe, en Catalogne.

Vasilisa: Pourquoi est-ce un rêve, ne peux-tu pas juste aller souper ? C'est un rêve très facile à réaliser.

Ibrahim: Ça prend trois mois et plus pour avoir une réservation et en ce moment il y a la covid, et je ne sais pas comment ça va se terminer. J'ai déjà soupé au restaurant Central à Lima au Pérou. Il était classé à l'époque le meilleur au monde.

Vasilisa: Quel est l'avenir de notre département selon toi ?

Ibrahim: Le niveau des cours de premier cycle a beaucoup baissé par rapport à l'époque où j'ai commencé. Il y avait beaucoup plus de cours de premier cycle de maths surtout en analyse et de très haut niveau. Je me souviens d'un cours de théorie des fonctions. Demande à Bernard Colin, il se souvient certainement. Je suis partiellement responsable de cette baisse de niveau parce que j'étais prof au département pendant 32 ans. Mais il faut réagir d'une façon ou d'une autre et se donner des critères solides. Je ne sais pas comment, c'est toujours difficile humainement de dire à un étudiant qu'il ne passe pas. Tu as tendance à penser individuellement, par rapport à telle personne, mais il faut se demander quel est le minimum qu'un étudiant doit savoir pour passer tel cours. Le point suivant. Est-ce encore un département francophone ? Ce n'est pas qu'une question de langue, il y a l'ambiance qui va avec. J'ai aimé au Département de mathématiques cette ambiance bon enfant et conviviale qui peut disparaître. Je pense que, petit à petit, ce département risque de devenir un département anglophone.

Vasilisa: Quels sont les défis de département ?

Ibrahim: Devenir ou redevenir francophone. Maintenir ou hausser le niveau des cours, des cours de maîtrise. Ne pas accepter de baisser le niveau des diplômes de maîtrise et de doctorat. Si quelqu'un ne mérite pas un tel diplôme, il faut le

dire.

3 Plus à propos d'Ibrahim

Vasilisa: Qui est ton héros mathématique ?

Ibrahim: Maurice Auslander. Il allait toujours au cœur de la question en enlevant tous les trucs superflus. Et il arrivait à voir de nouveaux problèmes ou questions. Une fois, un de ses étudiants lui a reproché de ne faire que la partie facile du travail et de changer de problème dès que ça devenait difficile. Auslander a répondu « You are welcome to do the same ! »

Vasilisa: Et toi, dans ton travail, comment arrives-tu à engendrer de nouvelles questions ?

Ibrahim: Ça vient naturellement en fonction de questions précédentes ou de travaux précédents ou d'une discussion, d'un problème dont j'ai entendu parler ou bien je me rappelle quelque chose et je me dis - tiens, peut-être que la même idée pourrait marcher ici ? 50 façons.

Vasilisa: Quel est ton résultat qui te rend le plus fier ?

Ibrahim: En 1984, j'ai écrit « Representation-finite trivial extension algebras⁷ ». Ce résultat complétait la classification des algèbres auto-injectives de représentation finie, un problème vieux et important (parce qu'il contient les représentations des groupes). À l'ICM de Berkeley⁸, Pierre Gabriel a inclus ce résultat dans sa présentation. J'en suis encore fier, même si ce n'était pas le plus difficile de mes travaux.

Vasilisa: Un résultat du début de ta carrière et un autre des années plus matures ?

Ibrahim: Le travail ci-dessus a été fait deux ans après mon doctorat, avant mon postdoc. Plus récent, mon article avec Thomas et Ralf⁹ « Cluster-tilted algebras as trivial extensions¹⁰ ». Et mon article avec Sonia¹¹ et Maria Inés Platzeck sur la dimension de représentation des algèbres inclinées¹². Ce sont sans doute mes trois meilleurs, ou ceux qui ont eu le plus d'impact.

Vasilisa: Quels sont les services à la communauté mathématique du Canada ou/et en général dont tu es le plus fier ?

Ibrahim: Quand j'ai fait mon doctorat, la théorie des représentations était

⁷Assem, I., Happel, D. et Roldán, O. : Representation-finite trivial extension algebras, J. Pure Appl. Algebra 33 (1984) 235-242.

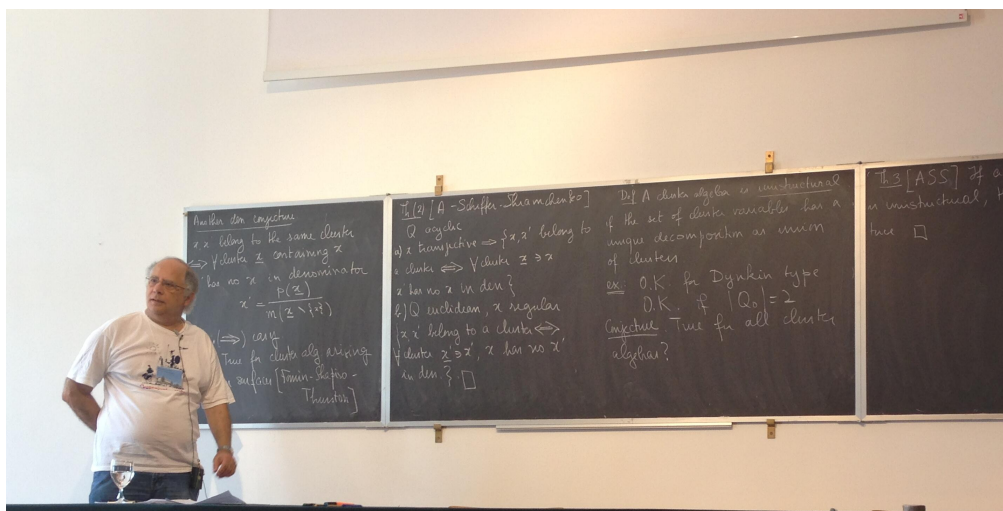
⁸International Congress of Mathematicians, August 3-11, 1986, Berkeley, California, États-Unis.

⁹Ralf Schiffler

¹⁰Assem, I., Brüstle, T., et Schiffler, R. : Cluster-tilted algebras as trivial extensions, Bull. London Math. Soc. 40 (2008) 151-162.

¹¹Sonia Trepode

¹²Assem, I., Platzeck, M. I., et Trepode, S. : On the representation dimension of tilted and lura algebras, J. Algebra 296 (2006) 426-439.



Ibrahim lors d'une présentation devant un tableau noir, juillet 2013. « Words, Codes and Algebraic Combinatorics », colloque organisé à l'occasion du 60e anniversaire de Christophe Reutenauer, Cetraro, Italie.

méconnue au Canada en général et au Québec en particulier. Je me suis donné pour objectif d'en faire un axe de recherche reconnu, je crois que c'est réussi. Plusieurs chercheurs québécois, pas forcément sherbrookoïses, sont reconnus internationalement en théorie des représentations. Mon domaine était surtout germano-américain quand j'y suis entré, je suis heureux d'avoir contribué à son internationalisation. Maintenant on entend parler toutes les langues dans les conférences. Par ailleurs, la série des conférences ARTA¹³, dont je suis un des fondateurs, a été un grand succès. Je crois avoir aidé à faire reconnaître la valeur de nos collègues latino-américains. Je n'étais pas seul à y pousser, mais maintenant ils sont établis et j'en suis heureux. Sur un plan plus personnel, je m'étais juré de pousser des filles à faire des carrières en maths, et je crois avoir réussi. Plus de la moitié de mes étudiants de maîtrise étaient des filles. Malheureusement seulement le tiers de mes doctorants. Les réticences culturelles sont très difficiles à vaincre.

Vasilisa: Pourquoi aimes-tu faire des maths, qu'est-ce qu'il y a qui te donne plaisir ?

Ibrahim: On pourrait écrire des pages là-dessus. Penser à des problèmes, se demander comment les résoudre, voir si mon idée « marche », construire des exemples, rédiger la preuve, contourner les obstacles, tout, quoi !

Vasilisa: Combien de temps dure ce plaisir mathématique, le plaisir d'avoir trouvé quelque chose de bon ?

Ibrahim: Ça peut durer des années ou quelques secondes, ça dépend. Le plaisir

¹³Advances in Representation Theory of Algebras, organisée pour la première fois en 2012.

mathématique ne dure pas toujours longtemps. Toujours au moment où je trouve la preuve d'un bon truc, j'ai quelques minutes de plaisir intense, très intense. Après ça baisse, mais ça ne disparaît pas.

Vasilisa: Est-ce que ça t'est déjà arrivé de ne pas pouvoir dormir la nuit en pensant à tes mathématiques ?

Ibrahim: Oui, en plus, je suis avec une mathématicienne maintenant. Et il m'arrive de parler maths la nuit avec elle.

Vasilisa: Es-tu content d'avoir eu une carrière de mathématicien et pas d'un historien ?

Ibrahim: Je ne sais pas, je n'ai pas eu la carrière d'un historien.

Vasilisa: Es-tu content de ta carrière de mathématicien en général ?

Ibrahim: Oui.

Vasilisa: Te sens-tu une personne accomplie ?

Ibrahim: Pas du tout. Je voudrais faire tant d'autres choses. J'ai négligé la culture, je ne lisais pas beaucoup de littérature.

Vasilisa: Mais tu lis beaucoup plus que moi quand même.

Ibrahim: Peut-être, mais le critère, c'est par rapport à moi, à ce que je voudrais lire, ce que je voudrais faire, ce que je voudrais apprendre.

Vasilisa: Que voulais-tu apprendre ?

Ibrahim: Beaucoup de choses, par exemple l'italien. La langue est un moyen d'accéder à la culture. Il y a énormément de choses qui m'attirent dans la culture italienne. J'ai pensé que c'était stupide de me laisser arrêter par le fait que je ne l'avais pas appris et j'ai commencé à lire en italien sans rien connaître. Voici un livre sur l'histoire byzantine en italien, c'est un sujet qui m'intéresse beaucoup. Je suis capable de le lire maintenant. Je n'aurais pas osé il y a 2 ans, parce que j'étais trop occupé avec mon travail. Je veux aussi perfectionner mon espagnol pour être capable d'écrire.

Vasilisa: Qu'est-ce qui te manque culturellement, qu'est-ce que tu n'as pas pu faire à cause des maths ?

Ibrahim: Par exemple, être au courant de l'actualité littéraire. Je n'ai pas lu « La roue rouge » d'Alexandre Soljenitsyne, ni les œuvres de Svetlana Alexievitch. Connaître les avancées de la pensée, par exemple en philosophie.

Vasilisa: Mais les maths, c'est aussi de la pensée.

Ibrahim: L'un n'empêche pas l'autre.

Vasilisa: Oui, mais si tu fais beaucoup de maths, pourquoi la philosophie te manque ?

Ibrahim: Parce que les maths, c'est une autre façon de penser. Si tu te poses une question classique, celle de l'existence de Dieu, ce n'est pas avec des preuves mathématiques que tu peux en discuter. Tu ne peux jamais venir à une conclusion définitive, mais la philosophie permet la discussion.

Vasilisa: Mais c'est ça, ce qui est bien avec les maths c'est que tu peux arriver à une conclusion, tandis qu'en philosophie tu ne peux pas.

Ibrahim: Oui, mais c'est peut-être ça qui me manque. Peut-être que je ne veux pas arriver à une conclusion. Une réponse c'est bien, mais ce n'est pas nécessaire. C'est la discussion qui m'importe. C'est pour ça que je préfère Dostoïevski à Tolstoï.

Vasilisa: Qu'est-ce qu'il y a de particulier en algèbre pour toi ?

Ibrahim: J'aime l'algèbre, mais au vu de mon parcours et de mes goûts, n'importe quelle branche des maths pures m'aurait plu autant. Je ne m'imagine pas faisant des maths appliquées.

Vasilisa: Qu'est-ce que tu dirais aux jeunes qui pensent à apprendre des maths ? Qu'est-ce que tu leur dirais pour les encourager à apprendre des maths ou à apprendre plus de maths ?

Ibrahim: Je sais ce que tu veux me faire dire... que les maths ont des applications ou un de ces lieux communs que tout le monde répète alors qu'il est évident que ça ne motive personne. J'ai essayé de faire des maths en français, la langue française est notre héritage et nous ne pouvons pas la laisser se diluer dans un magma globalisé ! Les maths ont quelque chose de plus que les autres sciences, c'est de la poésie pure et le français est une langue poétique, musicale et précise. La société nord-américaine dévalorise les maths comme elle dévalorise toutes les activités de l'esprit. Il ne faut pas se laisser déstabiliser, la pensée est la gloire de l'être humain et aucune activité n'est plus noble que la pensée, voilà. S'il y a quelqu'un qui demande à quoi ça sert les maths... on ne répond pas parce qu'aucune réponse ne le ou la satisfera, la question même prouve qu'il ou elle ne veut rien savoir. D'ailleurs les maths vont au moins procurer du plaisir à ceux qui en font, c'est suffisant, c'est joli.

Vasilisa: Quel est l'œuvre d'art ou de littéraire que tu aimes le plus.

Ibrahim: L'œuvre d'art - le Parthénon. Pour moi c'est le plus bel édifice qui ait jamais été construit. L'œuvre littéraire : « Les Frères Karamazov » et « Les possédés (Les démons) » de Dostoïevski. Les « Frères Karamazov » pour les questions métaphysiques qui y sont discutées. Par exemple, l'existence de Dieu. Et le personnage principal pour moi était Ivan Karamazov, celui qui ne croyait pas. On peut faire plusieurs lectures différentes du même livre. Et « Les démons » ... c'est vrai que ce livre est long, mais quand tu le prends, tu ne le lâches pas.

Vasilisa: J'ai lu qu'il a été payé pour écrire ceci contre les socialistes.

Ibrahim: Peut-être qu'il a été payé pour critiquer ceux qui voulaient changer le régime tsariste, mais il y croyait vraiment, ce sont les mêmes idées que tu retrouves dans toutes ses œuvres parce qu'il était antisocialiste. Il était ce qu'on appellerait maintenant slavophile. Aussi il y a le livre « L'empire du Levant » de René Grousset. Ce livre a eu plus d'influence sur moi que toutes les maths ensemble.

Vasilisa: Qu'en est-il des autres types d'art ?

Ibrahim: Le film « La grande illusion » de Jean Renoir. C'est le fils du peintre Auguste Renoir. C'est un des meilleurs metteurs en scène français. Rock'n'roll : « Run to the door » de Clinton Ford. C'est la chanson de mes 17 ans (j'en ai 73 ans maintenant). J'avais une vieille radio, qui prenait un meuble entier. J'écoutais depuis l'Égypte tout le rock anglais. Mais ça c'est le « sérieux » et je ne suis pas une personne sérieuse ! J'aime aussi Lucky Luke et Topolino, j'adore Totò et le cinéma d'aventures de Luigi Capuano ou André Hunebelle. Et depuis mon adolescence, je suis amoureux de Sylva Koscina !

4 Quatre questions de CaMUS

Vasilisa: Pour CaMUS nous terminons chaque entrevue avec les mêmes quatre questions. À part celle de professeur d'université, quelle profession aurais-tu aimé exercer ?

Ibrahim: Prof de Lycée. Mais prof ! Quand j'ai décidé de ne pas être ingénieur, c'était pour moi l'enseignement. Je suis prof par vocation et chercheur par accident.

Vasilisa: Quel est l'article que tu aurais aimé avoir écrit ? Un résultat de quelqu'un d'autre que tu aurais aimé obtenir toi-même ?

Ibrahim: Je n'ai jamais pensé aux autres, je voulais exister par moi-même. Ça ne veut pas dire que ce que font les autres ne m'intéresse pas, par exemple j'admire ce qu'a fait Auslander. Mais en tant que chercheur, ce qui m'importe, c'est ce que je fais, moi. Même si j'admire ses travaux, et je ne serai jamais capable de les égaler, ce qui m'importe reste ce que je fais.

Vasilisa: Quel article crois-tu que chaque étudiant gradué en mathématiques devrait lire ?

Ibrahim: La question est dure parce qu'il y a tellement d'articles. Il est difficile de donner une réponse universelle, pour tous les domaines des maths. Je pense quand même que tout le monde devrait lire « A Mathematician's Apology¹⁴ » de Hardy¹⁵. Le livre est écrit en anglais British, c'est de la poésie, écrite par un homme instruit et cultivé. Ce qu'il montre dans ce livre, c'est la façon de penser du mathématicien. Et c'est facile à lire, il n'y a que deux preuves : celle que racine de 2 est irrationnel et que l'ensemble des nombres premiers est infini. Ces preuves-là devraient être connues de tous, que ce soit en stats, en maths appliquées ou en maths pures. Quel que soit l'étudiant, je pense que ce livre l'intéressera.

Vasilisa: Quel est ton article préféré paru dans CaMUS ?

Ibrahim: Celui de Dominique Lavertu et Jean-Sébastien Fraser Martineau sur

¹⁴Hardy, G. H. (1967). A Mathematician's Apology (with a foreword by C. P. Snow). Cambridge University Press.

¹⁵Godfrey Harold Hardy

les frises¹⁶.

Bien tu m'as posé les quatre questions, mais maintenant, moi j'ai quelque chose à ajouter. Attention, regarde bien, mon doigt est pointé vers le ciel, il est censé souligner que ma déclaration finale est importante. Ce questionnaire parle peu de l'enseignement au premier cycle. Vous devriez trouver des questions, c'est important, le premier cycle. Pas les étudiants gradués, pas les chercheurs. Ma vocation, ce que j'ai voulu faire dans ma vie, c'est enseigner. J'ai adoré enseigner, j'ai surtout adoré mes étudiants. C'est à eux, les jeunes étudiants de Sherbrooke, de maths ou du BES, que je dois d'avoir aimé ma vie et ma carrière. Je veux dire merci à toutes et à tous. C'est eux qui devraient être au centre du questionnaire, pas moi ni ma recherche, merci !

MARIE-PIER DOMINIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
Courriel: marie-pier.dominique2@usherbrooke.ca

KLAUS HERRMANN
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
Courriel: klaus.herrmann@usherbrooke.ca

VASILISA SHRAMCHENKO
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
Courriel: vasilisa.shramchenko@usherbrooke.ca

¹⁶Fraser Martineau, J.-S. and Dominique Lavertu, D. : Frises et triangulations de polygones, Cahiers Mathématiques de l'Université de Sherbrooke (CaMUS) 1 (2010), 39–59.

CaMUS est une revue mathématique publiée par le Département de mathématiques de l'Université de Sherbrooke. Le but de ces cahiers est de permettre aux étudiants et étudiantes de présenter leurs travaux effectués dans le cadre d'activités tels les stages de recherche du premier cycle, les présentations au Club Mathématique et les cours d'initiation à la recherche. Les personnes auteures sont principalement des étudiants et étudiantes au premier cycle, notamment en mathématiques et au Baccalauréat en enseignement au secondaire avec profil en mathématiques. Cette revue est publiée à l'intention de tous ceux et celles qui s'intéressent aux mathématiques, à l'Université de Sherbrooke et ailleurs. Ses objectifs sont de favoriser :

- l'apprentissage de la rédaction d'articles dès le premier cycle,
- l'amélioration de la communication écrite,
- le développement de la rigueur d'expression,
- la motivation du personnel étudiant pour la recherche en général.

Le comité de rédaction de CaMUS est composé des étudiant(e)s :

- Marie-Pier Domingue
- Gabriel Dupuis
- Jean-Philippe Morissette

et des professeur(e)s :

- Thomas Brüstle
- Virginie Charette
- Klaus Herrmann
- Tomasz Kaczynski.

Information aux auteurs : Les articles doivent constituer des présentations originales, mais on ne demande pas qu'ils contiennent des résultats originaux : pour la prépublication de ces derniers, la série de Rapports de recherche du Département de mathématiques est un meilleur médium. Les articles doivent être rédigés en \LaTeX et soumis suivant les instructions données à la page Web de CaMUS :

<https://camus-udes.github.io/>

Abonnement, achat d'exemplaires et autres renseignements : CaMUS est une publication électronique sans frais avec un nombre limité d'exemplaires imprimés à vendre. Pour des informations sur le prix courant, le mode de paiement ou pour nous contacter, rendez-vous à l'adresse Web indiquée ci-dessus.

CaMUS · Département de mathématiques · Faculté des sciences · Université de Sherbrooke · 2500, boulevard de l'Université · Sherbrooke (Québec), Canada J1K 2R1