CaMUS **8**, 59 – 75

Une introduction aux théories topologiques des champs quantiques

Zoïk Dubois

Reçu le 2023-08-30 et accepté le 2025-06-04

RÉSUMÉ Cet article est dédié à présenter les théories topologiques des champs quantiques de manière accessible pour les étudiants au baccalauréat. Tout d'abord, l'origine et l'intérêt de ces objets mathématiques seront abordés. Ensuite, il sera introduit les théories topologiques des champs quantiques de dimensions 2 pour lesquelles il existe une représentation graphique très intéressante afin d'introduire ces objets. Cela mènera à l'exposition des axiomes définissant les théories topologiques des champs quantiques. Il sera ensuite présenté un exemple de théorie de dimension 2. Finalement, l'article se terminera avec quelques remarques et généralisations qui démontreront la complexité et l'intérêt des théories topologiques des champs quantiques.

1 Introduction

Les théories topologiques des champs quantiques (*topological quantum field theories* (TQFT) en anglais) proviennent du désir de trouver une fondation mathématique solide pour définir les théories des champs quantiques développées par les physiciens. Les calculs dans ce domaine ne sont pas habituellement défini avec un formalisme rigide, d'où l'intérêt de trouver une théorie permettant de bien les définir. Cette quête peut se représenter comme le développement d'une théorie permettant de faire un lien entre la géométrie et l'algèbre linéaire. Pour le cas particulier où l'on se restreint à la topologie, il est possible de définir une telle association avec des axiomes. Cette axiomatisation provenant du mathématicien Michael Atiyah est la base des théories topologiques des champs quantiques [Ati88]. Ainsi, dans son expression la plus simple, une TQFT est une règle d'association entre des espaces géométriques, par exemple les surfaces dans $\mathbb{R}^3$, et les espaces vectoriels respectant une série d'axiomes définis par Atiyah. C'est pour cette raison que les TQFTs ont obtenu une place importante dans la théorie quantique, car dès qu'une règle de correspondance respecte les axiomes elle

En premier lieu, j'aimerais remercier Professeur Maxence Mayrand pour m'avoir soutenu financièrement et pour avoir supervisé le stage duquel cet article en est l'accomplissement. Aussi, je remercie les membres du groupe S.A.G. et le département de mathématiques de l'Université de Sherbrooke pour leur contribution à la bourse que j'ai reçue pour ce stage en recherche. Finalement, j'aimerais mentionner la participation de mes parents qui m'ont soutenu moralement tout au long de cette aventure.

est par définition une TQFT ce qui simplifie d'une certaine manière la structure de l'espace géométrique source. En informatique, elles participent au développement de l'informatique topologique quantique, une variante de l'informatique quantique qui serait possiblement moins sensible au bruit dans son traitement de l'information. Finalement, pour les mathématiciens, c'est un outil qui sert à trouver des invariants aux variétés et aux nœuds.

L'objectif de ce présent article sera de présenter ces objets mathématiques aux multiples applications. Premièrement, les TQFTs de dimension 2 seront présentées. La structure géométrique et les propriétés des surfaces impliquées dans les TQFTs de cette dimension seront abordées. Ensuite, une généralisation des conditions que doivent respecter les TQFTs de dimension 2 sera proposée. Après, un exemple concret de TQFTs sera présenté. Dans cette section, une TQFT sera explicitement définie ce qui sera suivi d'un cas particulier précisant la définition de la TQFT. Finalement, la dernière section sera adressée au lecteur souhaitant pousser plus loin sa connaissance des TQFTs. Des remarques sur ce qui a été abordé dans l'article y seront fournies ainsi qu'une référence pertinente sur les théories topologiques des champs quantiques.

1.1 Notion préliminaire : Le produit tensoriel

Avant de commencer la présentation des TQFTs, il convient d'aborder la notion de produit tensoriel qui sera nécessaire ultérieurement. Pour assurer une bonne compréhension aux lecteurs de tous les niveaux, seulement les grandes lignes et les caractéristiques importantes pour le présent sujet seront exposées.

Tout d'abord, tous les produits tensoriels respectent ce qui est nommé *la propriété universelle du produit tensoriel*.

Définition 1.1. (*Propriété universelle du produit tensoriel*) Le produit tensoriel $V \otimes W$ est un espace vectoriel accompagné d'une application $\otimes : (v,w) \to v \otimes w$ de $V \times W$ à $V \otimes W$ telle que pour toutes applications bilinéaires $h : V \times W \to Z$, il existe une unique application linéaire $\tilde{h} : V \otimes W \to Z$ telle que $h = \tilde{h} \circ \otimes$ où Z est un espace vectoriel. Cela est représenté par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "h"'] & V \otimes W \arrow[d, "\exists ! \tilde{h}"] \\ & Z \end{tikzcd} .$$

Ainsi, le produit tensoriel de l'espace V et de l'espace W est un nouvel espace vectoriel qui est noté par $V \otimes W$ et dont la dimension est égale au produit des dimensions des deux espaces vectoriels respectifs. Cette propriété de la dimension est propre au produit tensoriel,de manière similaire à la dimension d'une somme directe d'espaces où elle est la somme des dimensions des espaces originaux. De plus, de cette propriété universelle il découle que s'il existe une autre application $\otimes_2$ de $V \times W$ à $V \otimes W$ satisfaisant la propriété universelle, les espaces $V \otimes W$

et $V \otimes_2 W$ seront isomorphes. Ainsi, on déduit que tous les différents produits tensoriels sont isomorphes entre eux. Finalement, les vecteurs d'un tel espace sont appelés des « tenseurs » et sont des combinaisons linéaires des « tenseurs purs » notés par $v \otimes w$ où $v \in V$ et $w \in W$. Pour les besoins de l'article, il suffit de comprendre les propriétés suivantes du produit tensoriel. Soient $V \otimes W$, $v_1, v_2 \in V$, $w_1, w_2 \in W$ et $\alpha \in \Bbbk$ où $\Bbbk$ est un corps quelconque, on a que :

- $\alpha \cdot (v_1 \otimes w_1) = \alpha \cdot v_1 \otimes w_1 = v_1 \otimes \alpha \cdot w_1$
- $(v_1 + v_2) \otimes w_1 = v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_1$
- $v_1 \otimes (w_1 + w_2) = v_1 \otimes w_1 + v_1 \otimes w_2$.

Pour mieux comprendre, voici un exemple concret qui en même temps introduira un isomorphisme qui sera utilisé dans la définition de la TQFT en exemple.

Exemple 1.2. Soit $\mathbb{C}[G]$ l'espace vectoriel de toutes les fonctions $f : G \to \mathbb{C}$ où G est un groupe fini quelconque. On a que $\mathbb{C}[G] \otimes \mathbb{C}[G]$ et que $\mathbb{C}[G \times G]$ sont deux exemples de produit tensoriel pour $\mathbb{C}[G] \times \mathbb{C}[G]$. De plus, on a que

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[G] \otimes \mathbb{C}[G] &\xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[G \times G] \\ (f \otimes h) &\longmapsto F : G \times G \to \mathbb{C} \\ &\qquad\qquad (a,b) \mapsto f(a)h(b). \end{aligned}$$

De même, $\underbrace{\mathbb{C}[G] \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}[G]}_{n \text{ fois}}$, que l'on note $\mathbb{C}[G]^{\otimes n}$, est un produit tensoriel de $\underbrace{\mathbb{C}[G] \times \cdots \times \mathbb{C}[G]}_{n \text{ fois}}$. De la même façon que pour le produit de deux espaces, on aura que $\underbrace{\mathbb{C}[G] \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}[G]}_{n \text{ fois}} \cong \mathbb{C}[G^n]$ où

$$\begin{aligned} f_1 \otimes \cdots \otimes f_n &\longmapsto F : G^n \longrightarrow \mathbb{C} \\ &\qquad (a_1, \ldots, a_n) \longmapsto f_1(a_1) \cdots f_n(a_n). \end{aligned}$$

Ces isomorphismes proviennent du fait que l'espace vectoriel constitué de toutes les fonctions $F : G^n \to \mathbb{C}$ respecte la propriété universelle du produit tensoriel pour des fonctions choisies. Ainsi, en vertu du fait que tous les produits tensoriels sont isomorphes il découle directement que $\mathbb{C}[G]^{\otimes n} \cong \mathbb{C}[G^n]$. La preuve est laissée au lecteur puisqu'elle n'est guère utile pour la suite de l'article.

Les notions présentées antérieurement sont suffisantes pour le besoin de cet article. Toutefois, le lecteur souhaitant une plus grande rigueur de définition est encouragé à consulter des ouvrages sur le calcul tensoriel.

2 Les TQFTs en dimension 2

Les TQFTs de dimension 2 sont souvent utilisées pour introduire ces objets aux novices. Leur particularité est que les espaces géométriques de ces TQFTs se représentent par des surfaces dans $\mathbb{R}^3$. Ainsi, la structure géométrique de ces surfaces sera présentée. Ensuite, les TQFTs de dimension 2 seront concrètement définies. Cela permettra d'introduire la prochaine section qui présentera les axiomes des TQFTs.

2.1 La structure géométrique des surfaces à bords dans $\mathbb{R}^3$

Avant de présenter les TQFTs, il est important d'aborder le sujet des surfaces et de leur structure, car la compréhension des TQFTs en sera grandement améliorée. Ainsi, les surfaces en jeux sont des variétés de dimension 2 qui peuvent être considérées comme des surfaces avec des composantes de bord de l'espace $\mathbb{R}^3$ et qui sont appelées des *cobordismes*. Une variété est un objet dont les propriétés locales sont similaires à un ouvert sur un espace euclidien, mais dont les propriétés globales peuvent être différentes. Les composantes de bord d'une surface sont simplement une collection de courbes fermées et lisse de $\mathbb{R}^3$ qui définissent dans un sens « l'extrémité » de la surface originale. Visuellement, pour les TQFTs de dimension 2, les composantes de bord contenant une seule courbe sont représentées par des cercles. (voir figure 1) Cette visualisation est possible puisque qu'il existe un type de morphisme appelé *difféomorphisme* qui assure que les courbes peuvent êtres déformées en un cercle. Ensuite, si la composante de bord est une collection de courbes, on la visualisera par un nombre de cercles équivalent au nombre de courbes positionnées de manière à ce qu'ils ne s'intersectent pas et qu'ils ne soient pas les uns dans les autres. Généralement, ils sont alignés sur une même ligne verticale. Le terme « cobordisme » fait alors seulement référence au fait que les surfaces à bords font un lien entre deux composantes de bords d'où l'appellation *cobordisme*. Il est possible qu'une surface ne possède pas de composantes bord. Ces surfaces à bords possèdent un *genre* qui est visualisé par des trous dans la surface pour le cas en dimension 2. Le genre est un invariant pour ce type de surface ce qui sert, par exemple, à déterminer si deux surfaces sont équivalentes par difféomorphisme. Ainsi, pour comparer deux surfaces il est possible de vérifier leur genre ; s'il est différent il est possible de conclure qu'elles ne sont pas équivalentes. Le concept de genre est un concept plus élaboré, mais pour les besoins de cette présentation, il suffit de savoir que le genre est une caractéristique importante de ce type de surface. Finalement, il est possible qu'une surface ne soit pas connexe, c'est-à-dire qu'elle puisse être composée de plusieurs surfaces à bords connexes disjointes. Dans ce cas, cette surface se nomme *l'union disjointe* des cobordismes qui la composent. Il en est de même pour les composantes de bord. Il en découle que toutes les composantes de bords sont générées par l'union disjointe de la composante de bords que l'on illustre par l'ensemble contenant un seul cercle. En voici quelques exemples.

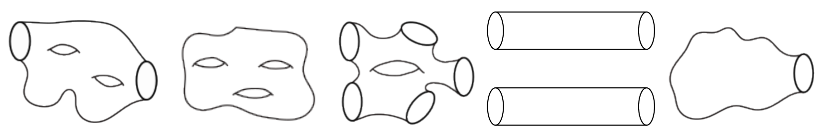


FIGURE 1 : Quelques surfaces à bords

À ces surfaces, il est possible d'ajouter une structure additionnelle pour différencier les composantes de bords et ainsi orienter d'une certaine manière la surface. Ainsi, les composantes de bords d'une surface sont divisées en deux types : les composantes de bords « entrants » et les composantes de bords « sortants ». La convention utilisée dans cet article est de placer les composantes de bords entrants à gauche et les composantes de bords sortants à droite. Il est possible de conceptualiser les surfaces comme des tuyaux transportant de l'eau dont le courant va de gauche à droite. Ainsi, l'eau entre à gauche par les composantes de bords entrants et sort à droite par les composantes de bords sortants. Par exemple, si les composantes de bords entrants sont représentées par un trait rouge et les sortants par un trait noir on a que l'orientation de la convention donne les figures suivantes.

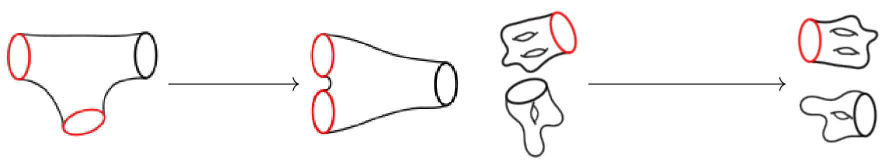


FIGURE 2 : L'orientation conventionnelle des surfaces à bords

Au regard de l'effet de cette convention, il est possible de remarquer qu'une surface est définie principalement par son genre (nombre de trous), son nombre de composantes de bords entrants et son nombre de composantes de bords sortants. Ainsi, une surface peut se déformer en une autre si et seulement si cette nouvelle surface possède le même genre, le même nombre de composantes de bords entrants et le même nombre de composantes de bords sortants. Si cette déformation est possible, il est dit que ces deux surfaces sont *difféomorphes*. Cela permet entre autre de standardiser la notation graphique des cobordismes.

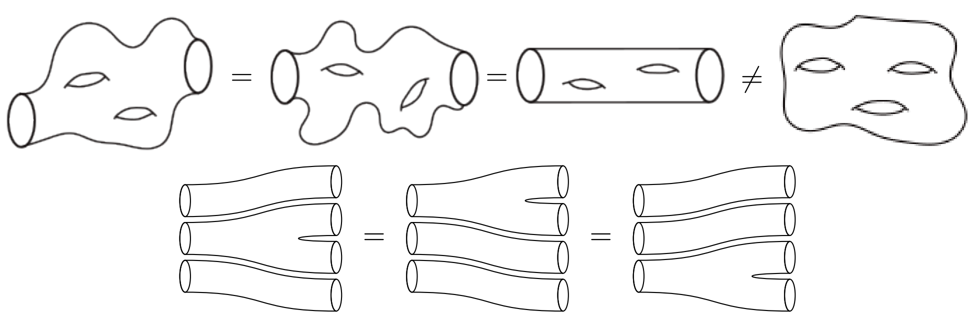


FIGURE 3 : L'équivalence des cobordismes

Pour terminer d'exposer la structure géométrique des cobordismes, il convient de présenter l'opération géométrique qui confère une structure aux cobordismes. Il existe une manière de composer des surfaces pour en obtenir une autre. Ultimement, cela mènera à la présentation des six cobordismes générateurs. Alors, pour composer deux cobordismes, il suffit que le nombre de composantes de bords sortants du premier cobordisme soit le même que le nombre de composantes de bords entrants du deuxième. Pour reprendre l'analogie avec les tuyaux d'eau, il faut que la juxtaposition de deux pièces de tuyau ne laisse aucune fuite ; le but est que l'eau entre par les composantes de bords entrants du premier cobordisme et sorte uniquement par les composantes de bords sortants du deuxième cobordisme. Voici quelques exemples de compositions correctes et incorrectes de cobordisme.

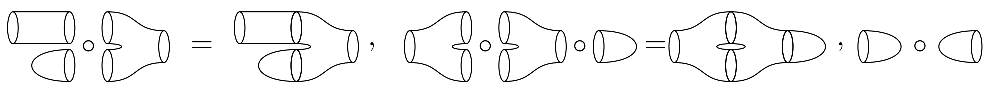


FIGURE 4 : Quelques compositions correctes

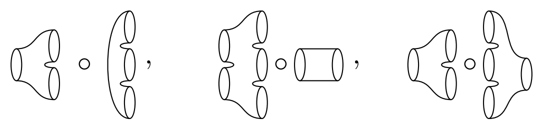
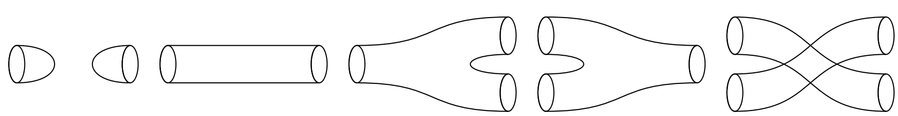


FIGURE 5 : Quelques compositions incorrectes

Finalement, cette règle de collage des cobordismes a pour conséquence que toutes les surfaces à bords se décomposent en une combinaison de six cobordismes en particulier. La preuve sera omise, car elle dépasse le niveau voulu de cet article. Toutefois, il est assez intuitif que ces six cobordismes sont des générateurs, car toutes les relations importantes y sont représentées : la création d'une composante de bords, la fusion de deux composantes de bords en une, la division d'une composante de bords en deux, la destruction d'une composante de bords, l'identité et la permutation de deux composantes de bords. Ils sont représentés graphiquement avec ces cobordismes



Il est important de souligner que la représentation du cobordisme de permutation peut porter à confusion, car graphiquement les deux cylindres semblent s'intersecter, or il n'en est rien. Le lecteur peut s'imaginer que les deux cylindres passent un par dessus l'autre ce qui est possible, car c'est une surface dans l'espace $\mathbb{R}^3$. L'impression qu'ils se croisent provient du fait que les surfaces sont dessinées sur un support en deux dimensions.

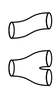
Maintenant que la structure géométrique des cobordismes à bien été expliquée, il est possible de donner la définition concrète des TQFTs de dimension 2.

2.2 La définition des TQFTs de dimension 2

Les TQFTs sont des objets mathématiques dont l'utilité est de représenter une structure géométrique dans un autre contexte mathématique. Dans le cas des

TQFTs de dimension 2, elles représentent la structure géométrique des surfaces à bords, les cobordismes, dans le contexte de l'algèbre linéaire. Ainsi, les TQFTs de cette dimension associent les composantes de bords à des espaces vectoriels précis et les cobordismes à une application linéaire précise entre l'espace vectoriel associé à ses composantes de bords entrant et l'espace vectoriel associé à ses composantes de bords sortant. Un peu comme les homomorphismes de groupes, les TQFTs doivent faire en sorte que la structure des cobordismes soit conservée. Plus précisément, cela se résume à respecter six conditions.

Premièrement,la composante de bords illustrée par un cercle seul, doit être envoyée à un espace vectoriel choisi, par exemple l'espace arbitraire V sur le corps des scalaires $\Bbbk$. Par suite, la composante de bords composée de deux cercles disjoints doit être envoyée au produit tensoriel $V \otimes V$. En généralisant, la condition est que la composante de bords composée de n cercles disjoints doit être envoyée au produit tensoriel de n copies de V avec lui-même ($V^{\otimes n}$). De plus, il faut appliquer cette association pour les composantes de bords entrant et les composantes de bords sortant de manière indépendante. Il est nécessaire de procéder ainsi afin de conserver la relation entre le cobordisme et ses composantes de bords. En outre, il doit aussi en être de même pour les cobordismes. Ainsi, le cobordisme composé de plus d'une surface disjointe doit être envoyé au tenseur formé des applications linéaires associées aux cobordismes qui le forment. Par exemple, il faut avoir que

 $\longmapsto Id_V \otimes \mu$

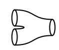
où $\mu : V \to V \otimes V$.

Deuxièmement, les TQFTs doivent envoyer la composante de bords vide au corps des scalaires de l'espace vectoriel cible. Par exemple, si l'espace vectoriel V est défini sur le corps des nombres réels, alors la composante de bords vide est envoyé à $\mathbb{R}$.

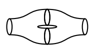
Troisièmement, comme pour les homomorphismes de groupes, les cobordismes de genre 0 dont le nombre de composantes de bords entrants est identique au nombre de composantes de bords sortants doivent être envoyés à l'application identitaire entres les espaces vectoriels associés aux composantes de bords. Par exemple, le cobordisme avec quatre composantes de bords de chaque type et de genre 0 doit être envoyé à l'application identité de l'espace $V \otimes V \otimes V \otimes V$. De plus, si le genre est différent de 0, on aura que la surface pourra être décomposée, en appliquant la règle de collage présentée précédemment, en surfaces de genre 0. L'application associée à ce type de surface sera potentiellement différente de l'application identitaire puisque chaque surface de genre 0 qui la compose sera associée à une application précise et l'application résultante sera la composition de ces fonctions d'où qu'il est possible de ne pas retrouver l'application identité. Finalement, le seul cobordisme qui ne respecte pas cette condition est le cobordisme de permutation, car son rôle est de permuter deux éléments, donc même si c'est une application de $V \otimes V \to V \otimes V$ il est différent de l'application identité. Le cas de ce cobordisme est le sujet de la sixième condition.

Quatrièmement, deux cobordismes connexes équivalents doivent avoir la même image. Cela est une conséquence de l'équivalence des cobordismes basée sur le nombre de composantes de bords entrant, le nombre de composantes de bords sortant et le genre. Il est logique que cette condition doit être satisfaite, car sinon la structure des surfaces ne serait pas correctement représentée par les TQFTs. À titre d'exemple, il faut que l'image d'une TQFT soit la même pour toutes les surfaces n'étant pas une union disjointe de surfaces ayant trois composantes de bords entrants, deux sortants et un genre de quatre.

Cinquièmement, si un cobordisme se décompose en d'autres, il faut que l'image du premier soit équivalente à la composition des images respectives des cobordismes qui le composaient. Par exemple, si on a les cobordismes suivants et leur image donnée par une TQFT quelconque

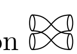
 $\longmapsto f_1 : V \to V \otimes V$  $\longmapsto f_2 : V \otimes V \to V$

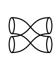
 $\longmapsto f_3 : V \to V.$

Comme  $=$ , la condition revient à dire que le diagramme suivant commute, c'est-à-dire que $f_2 \circ f_1 = f_3$.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{V} \arrow[r, "f_1"] \arrow[rr, bend right, "f_3"] & V \otimes V \arrow[r, "f_2"] & \mathrm{V} \end{tikzcd}$$

Figure 6 : Diagramme commutatif de la cinquième condition

La dernière condition est que le cobordisme de permutation  soit envoyé à une application linéaire de permutation. Très souvent, cette application est l'application canonique de permutation pour le produit tensoriel. Par exemple, l'image de ce cobordisme devrait être l'application suivante si un bord est envoyé à l'espace vectoriel V :


$$\longmapsto \rho : V \otimes V \to V \otimes V$$
$$v \otimes w \mapsto w \otimes v.$$

Il est important de remarquer que le choix de l'application linéaire de permutation dépend du contexte. L'objectif étant de représenter la propriété de symétrie des cobordismes, il est possible que l'application linéaire associée au cobordisme de permutation ne soit pas l'application canonique de permutation du produit tensoriel. Dans certains cas, cette application linéaire doit être modifiée pour que la structure induite par la TQFT sur l'espace vectoriel soit commutative. Cela est une conséquence de la cinquième condition et des relations suivantes de la structure des cobordismes.

FIGURE 7 : Relations de « commutativité » et de « co-commutativité »

En somme, toutes les TQFTs de dimension 2 respectent ces conditions. De plus, si une autre règle d'association entre les surfaces à bords et l'algèbre linéaire respecte ces conditions, alors elle est directement une TQFT. La généralisation des cinq premières conditions sont exactement les axiomes donnés par Atiyah pour définir les TQFTs. La sixième condition ne fait pas partie des axiomes, car historiquement il n'était pas possible de concevoir une TQFT qui ne représenterait pas la symétrie des variétés dans un contexte linéaire lorsque les axiomes ont été établis. Toutefois, des contres-exemples ont été trouvés d'où l'importance de ne pas négliger la nécessité d'avoir une application linéaire spécifique associée au cobordisme de permutation. Maintenant que ces conditions ont été établies, il est intéressant de donner leur généralisation qui sont précisément les axiomes définissant les TQFTs.

3 La définition axiomatique des TQFTs

Les principaux changements, en comparaison avec les conditions données pour les TQFTs de dimension 2, sont que les bords sont remplacés par des variétés de dimension *n-1* et que les cobordismes deviennent des variétés de dimension n. Les variétés sont les généralisations des surfaces à bords et des bords en dimension supérieure. Cependant, le lien entre les deux types de variétés est le même ; les bords des variétés de dimension n sont les variétés de dimension *n-1*. De plus, lorsqu'il est question d'union disjointe il suffit de comprendre que c'est une manière d'unir des variétés en une variété possédant les variétés unies comme composantes disjointes. Par exemple, un bord composé de deux cercles disjoints serait l'union disjointe, notée par $\coprod$, des deux bords composés de un cercle uniquement. Aussi, il en est de même pour les variétés de dimension n. Alors, ces précisions faites, il est possible de présenter la définition axiomatique des TQFTs.

Une théorie topologique des champs quantiques (TQFT) de dimension n est une règle $\mathcal{A}$ que l'on peut définir en deux parties. La première $\mathcal{A}_1$ qui associe à chaque variété Σ de dimension *n-1* (les composantes de bords) un $\mathbb{k}$-espace vectoriel $\mathcal{A}(\Sigma)$ et la deuxième $\mathcal{A}_2$ qui associe à chaque variété $M : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ de dimension n (les cobordismes) une application linéaire $\mathcal{A}(M) : \mathcal{A}(\Sigma_1) \to \mathcal{A}(\Sigma_2)$. Cette règle doit satisfaire les axiomes suivants :

A1 : Deux variétés de dimension n équivalentes doivent avoir la même image :

$$M \cong M' \Rightarrow \mathcal{A}(M) = \mathcal{A}(M').$$

Ici considérons que deux variétés sont équivalentes si elles ont le même nombre de composantes connexes, le même nombre de composantes de bords entrant, le même nombre de composantes de bords sortant, le même genre, la même décomposition en cobordismes générateurs et s'il existe une application qui satisfait certains critères de continuité (difféomorphisme) qui permet de déformer la première variété en la seconde.

A2 : La variété de dimension n faisant le lien entre deux mêmes variétés de dimension *n-1* doit être envoyé à l'application linéaire identité.

$$\text{Si } M : \Sigma \to \Sigma \Rightarrow \mathcal{A}(M) = Id_{\mathcal{A}(\Sigma)}.$$

A3 : Étant donné une décomposition $M = M' \circ M''$, alors on doit avoir

$$\mathcal{A}(M) = \mathcal{A}(M') \circ \mathcal{A}(M'').$$

A4 : L'union disjointe ($\coprod$) de variétés de dimension *n-1* (bord) doit être envoyée au produit tensoriel d'espaces vectoriels ; si $\Sigma = \Sigma_1 \coprod \Sigma_2 \Rightarrow \mathcal{A}(\Sigma) = \mathcal{A}(\Sigma_1) \otimes \mathcal{A}(\Sigma_2)$. Pour les cobordismes, il faut qu'ils soient envoyés au produit tensoriel des applications linéaires ; si $M = M' \coprod M'' \Rightarrow \mathcal{A}(M) = \mathcal{A}(M') \otimes \mathcal{A}(M'')$.

A5 : La variété vide de dimension *n-1* doit être envoyée au corps $\Bbbk$ des scalaires de l'espace vectoriel. Il s'en suit que la variété de dimension n faisant le lien entre la surface vide et elle-même doit être envoyée à l'endomorphisme identité dans le corps de scalaire $\Bbbk$.

Pour compléter la définition, il suffit d'ajouter que le cobordisme qui permute ses bords doit être envoyé à une application linéaire qui confère une structure de symétrie à l'espace vectoriel but de la TQFT. En outre, il est possible d'y reconnaître facilement les conditions présentées précédemment lorsque $n = 2$. Pour rendre le concept un peu plus concret, la prochaine section sera dédiée à la présentation d'un exemple de TQFT de dimension 2.

4 Un exemple de TQFT

Avant de passer à la définition explicite de la TQFT en exemple, il convient de présenter l'espace vectoriel cible de cette dernière.

4.1 L'espace vectoriel H

L'espace H est défini comme l'espace de toutes les fonctions $f : G \to \Bbbk$ telles que$f(aga^{-1}) = f(g)$ pour tout $a,g \in G$ où G est un groupe quelconque fini et $\Bbbk$ un corps arbitraire. Les fonctions ayant cette propriété sont nommées des *fonctions centrales*. Une conséquence de cette définition est que les fonctions centrales sont constantes pour tous les éléments de G étant en relation où deux éléments, x et y, de G sont en relation s'il existe $a \in G$ tel que $y = axa^{-1}$. Cette relation est une relation d'équivalence nommée la conjugaison ; x et y sont donc des éléments dit « conjugués » l'un de l'autre. Cette relation permet de partitionner le groupe en classes d'équivalence qui sont composées de tous les éléments conjugués entre eux. Alors, les fonctions centrales ont la propriété d'être constante pour tout les éléments d'une même classe de conjugaison. Ainsi, il est possible de définir mathématiquement l'espace vectoriel H ainsi : $H := \{f : G \to \Bbbk \mid f(aga^{-1}) = f(g)\ \forall a,g \in G\}$. Finalement, il est possible de générer cet espace vectoriel avec la famille de vecteurs suivante $H =< \delta_{c_1}, \delta_{c_2}, \ldots, \delta_{c_n} >$ où δ_{c_i} est la fonction définie comme suit et c_i un représentant de sa classe de conjugaison.

Définition 4.1. Soit $g \in G$, on a

$$\delta_{c_i}(g) = \begin{cases} 1 & \text{si } g \text{ est un conjugué de } c_i \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

Il est assez clair que c'est une base de H, puisqu'il est évident que la famille des fonctions δ_c est libre et que toutes les fonctions centrales peuvent être obtenues par une combinaison linéaire de fonctions δ_c . Le choix de cette base pour H est judicieux, car ce n'est pas la base utilisée normalement pour cet espace. La section 4.3 traitera de cette autre choix de base de l'espace H .

4.2 La définition explicite d'une TQFT

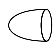
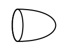
Tout d'abord, il convient d'établir qu'il suffit de définir une TQFT sur les six générateurs des surfaces à bords dans $\mathbb{R}^3$ pour que la définition soit complète. Ceci découle du fait qu'une TQFT doit respecter la propriété de composition de la structure des surfaces. Ainsi, comme les six générateurs sont suffisants pour former toutes les surfaces et que la TQFT impose que la composition de surface soit envoyée à la composition des applications linéaires, il sera possible d'obtenir toutes les applications de toutes les surfaces avec la définition des six générateurs. Alors, pour obtenir l'application associée à une surface quelconque, il suffit de décomposer la surface en générateurs, ensuite, de calculer la composition des applications associées aux générateurs pour obtenir l'application associée à la surface originale. Voici donc, la définition des TQFTs faisant le lien entre les surfaces à bords de genre 0 et les produits tensoriels de l'espace vectoriel H.

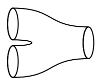
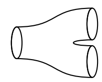
$$\text{'Composantes de Bords'} \longrightarrow \text{'Espaces vectoriels'}$$

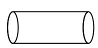
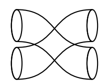
$$\begin{aligned} 0 &\longmapsto \mathbb{C} \\ 1 &\longmapsto H \\ 2 &\longmapsto H \otimes H \\ 3 &\longmapsto H \otimes H \otimes H \\ &\vdots \\ n &\longmapsto H^{\otimes n} \end{aligned}$$

Ici, les nombres naturels représentent le nombre de cercles disjoints qui forment une composante de bords entrant ou sortant d'une surface quelconque. Cette notation est souvent utilisée, car elle est plus simple que des illustrations graphiques de cercles disjoints. Rappelons que cette règle d'association s'applique pour les composantes de bords entrant et les composantes de bords sortant de manière indépendante.

'Cobordismes de genre 0' $\longrightarrow$ 'Applications linéaires'

 $\longmapsto \eta : \mathbb{C} \to H$  $\longmapsto \varepsilon : H \to \mathbb{C}$

 $\longmapsto \mu : H \otimes H \to H$  $\longmapsto \Delta : H \to H \otimes H$

 $\longmapsto \mathrm{Id}_H : H \to H$  $\longmapsto \rho : H \otimes H \to H \otimes H$

Les définitions des applications linéaires $\eta, \varepsilon, \mu, \Delta, Id_H$ et de ρ sont

$$\begin{aligned} \eta : \mathbb{k} &\longrightarrow H \\ r &\longmapsto r\delta_e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon : H &\longrightarrow \mathbb{k} \\ f &\longmapsto f(e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu : H \otimes H &\longrightarrow H \\ F &\longmapsto \tilde{f} \\ \text{où } \tilde{f} : G &\longrightarrow \mathbb{k} \\ g &\longmapsto \sum_{ab=g} F(a,b) \\ \Delta : H &\longrightarrow H \otimes H \\ f &\longmapsto F \\ \text{où } F : G \times G &\longrightarrow \mathbb{k} \\ (g_1, g_2) &\longmapsto \sum_{ab=g_2} \sum_c \frac{1}{|c^{-1}|} \delta_c(g_1)\delta_{c^{-1}}(a) f(b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Id_H : H &\longrightarrow H \\ f &\longmapsto f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho : H \otimes H &\longrightarrow H \otimes H \\ F(a,b) &\longmapsto F(b,a) \end{aligned}$$

où e est l'élément neutre du groupe G, c est le représentant de sa classe de conjugaison et $|c|$ est le cardinal de la classe dont c est le représentant. De la même manière, c^{-1} est le représentant de la classe de conjugaison contenant l'inverse de l'élément c. De plus, les sommes indexées par $ab = g$ signifie qu'il faut additionner pour tout les couples d'éléments de G dont le produit donne l'élément g. La somme indexée par c signifie qu'il faut faire la somme pour toutes les classes de conjugaison de G. De plus, il est naturel d'ajouter que l'union disjointe de cobordismes générateurs sera envoyée au produit tensoriel de leur application respective. Ainsi, avec cette précision, il devient évident que les quatre premières conditions sont respectées par cette TQFT de même que la condition sur l'application de permutation. Pour confirmer que la condition sur la composition de cobordismes soit envoyée à la composition des applications linéaires, il faudrait avoir l'expression générale. Toutefois, cette expression était un peu trop complexe pour le niveau souhaité de cet article. Cependant, la vérification de ces conditions a été faite dans le cadre de mon stage, ce qui me permet d'affirmer que cette condition est bien respectée. Ainsi, cet exemple est une TQFT bien définie. L'étude du cas particulier de cette TQFT permettra de mettre encore plus en évidence l'effet du genre des surfaces à bords sur une TQFT de dimension 2.

4.3 Un résultat original

Maintenant que la TQFT a été présentée, il est possible de revenir sur les avantages de choisir les fonctions δ pour former la base de l'espace H. Une courte mise en contexte sur la théorie des représentations linéaires des groupes finis sera donnée pour bien mettre en valeur l'utilité de ce choix de base.

Dans la littérature sur les TQFTs de dimension 2, l'espace vectoriel des fonctions centrales est défini en utilisant la théorie des représentations linéaires des groupes finis. La notion centrale de cette théorie est qu'il est possible de trouver des homomorphismes entre un groupe et le groupe général linéaire $GL_n(\mathbb{C})$ des matrices de dimension n à coefficients dans $\mathbb{C}$. Ces homomorphismes de groupes nommés *représentations* permettent de représenter les éléments du groupe source par des matrices qui elles-mêmes peuvent êtres interprétées comme des endomorphismes sur un espace vectoriel quelconque. Le groupe est donc représenté dans un contexte d'algèbre linéaire. De plus, une représentation dite *irréductible* signifie que l'espace vectoriel V de la représentation n'est pas l'espace trivial et qu'il n'existe pas de représentation pour un sous-espace vectoriel de V. Finalement, le caractère d'une représentation est la fonction qui associe à chaque élément du groupe un nombre complexe correspondant à la trace de la matrice associée à l'élément par la représentation.

Ainsi, la base donnée habituellement pour l'espace H est composée des caractères des représentations irréductibles du groupe qui forment une base orthogonale. Par conséquent, toute la TQFT était définie en utilisant cette théorie et les propriétés qui en sont rattachées ; il était donc nécessaire de connaître la théorie des représentations linéaires des groupes finis pour la comprendre. La force de la base de H formée par les fonctions δ est qu'il n'est plus nécessaire de connaître la théorie des représentations linéaires des groupes finis pour comprendre, premièrement, l'espace H et, deuxièmement, la TQFT. En outre, toute la TQFT est simplifiée, car elle n'utilise aucune propriété provenant de la théorie des représentations linéaires des groupes finis ; elle se restreint à des sommes et au comportement des fonctions δ qui est beaucoup plus simple que celui des caractères des représentations irréductibles. Aussi, la définition des δ est plus explicite que celle des caractères qui est beaucoup plus difficile à trouver. Un autre avantage des fonctions δ est que la TQFT n'est plus restreinte au corps de scalaires $\mathbb{C}$. Lorsque définie avec les caractères, il était nécessaire que le corps de nombre soit celui des complexes, car c'est une obligation dans la théorie des représentations linéaires des groupes finis que le corps utilisé soit $\mathbb{C}$. Finalement, cette définition plus simple de l'espace H rendant la TQFT plus simple aussi et libre pour le choix du corps de scalaires est un résultat obtenu au cours de mon stage.

4.4 Un cas particulier

Lorsque le groupe G est commutatif, il y a pour conséquence que l'espace H devient l'espace de toutes les fonctions possibles de G au corps $\mathbb{C}$. Il est même possible d'être plus général et de considérer des fonctions ayant pour codomaine un corps quelconque $\Bbbk$. Cet espace est noté par $\Bbbk[G]$ pour le différencier de H qui n'impose pas que le groupe soit abélien. Toutes les fonctions sont centrales pour un groupe abélien puisque tous les éléments sont seuls dans leur classe de conjugaison, d'où que $\Bbbk[G]$ est l'espace de toutes les fonctions de G dans $\Bbbk$. Ainsi, la dimension de l'espace $\Bbbk[G]$ est égale au nombre d'éléments dans le groupe. Ce cas particulier est intéressant, car il permet d'observer directement et concrètement l'effet du genre (nombre de trous). On voit qu'un facteur de $|G|^k$, où k est le genre, apparait dans les expressions lorsqu'on les compare à celle obtenues pour l'espace H. Avant d'introduire les expressions, rappelons que les éléments de $\Bbbk[G]\otimes\Bbbk[G]$ peuvent être considérés comme des fonctions $G\times G\to\Bbbk$ où $\times$ est le produit cartésien habituel d'ensemble. Ainsi, pour les cobordismes générateurs de genre k, on obtient les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}\eta : \Bbbk &\longrightarrow \Bbbk[G]\\ r &\longmapsto r|G|^k\delta_e\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon : \Bbbk[G] &\longrightarrow \Bbbk\\ f &\longmapsto |G|^k f(e)\end{aligned}$$

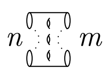
$$\begin{aligned}\mu : \Bbbk[G]\otimes\Bbbk[G] &\longrightarrow \Bbbk[G]\\ F &\longmapsto \tilde{f}\\ \text{où } \tilde{f} : G &\longrightarrow \Bbbk\\ g &\longmapsto |G|^k \sum_{\substack{\forall (a,b)\in G^2\\ ab=g}} F(a,b)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Delta : \Bbbk[G] &\longrightarrow \Bbbk[G] \otimes \Bbbk[G] \\
f &\longmapsto F \\
\text{où } F : G \times G &\longrightarrow \Bbbk \\
(a,b) &\longmapsto |G|^k f(ab)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Id_{\Bbbk[G]} : \Bbbk[G] &\longrightarrow \Bbbk[G] \\
f &\longmapsto |G|^k f
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\rho : \Bbbk[G] \otimes \Bbbk[G] &\longrightarrow \Bbbk[G] \otimes \Bbbk[G] \\
F(a,b) &\longmapsto F(b,a).
\end{aligned}
$$

Dans ces expressions, on a que e désigne l'élément neutre de G et que l'opération entre deux éléments de G est représentée par la concaténation. De plus, il est possible d'obtenir une expression générale relativement simple où il est encore possible d'observer l'effet du genre.



$$
\begin{aligned}
\longmapsto Gen : \Bbbk[G]^{\otimes n} &\longrightarrow \Bbbk[G]^{\otimes m} \\
F &\longmapsto \tilde{F} \\
\text{où } \tilde{F} : G^m &\longrightarrow \Bbbk \\
(g_1, \ldots, g_m) &\longmapsto |G|^k \sum_{\substack{\forall (a_1,\ldots,a_n) \in G^n \\ a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n = g_1 g_2 \cdots g_{m-1} g_m}} F(a_1, \ldots, a_n)
\end{aligned}
$$

Ces expressions sont les résultats que j'ai obtenus au cours de mon stage d'été en recherche. J'ai pu facilement prouver que la TQFT de ce cas respectait les conditions présentées précédemment. Ces expressions ont été calculées assez tôt lors de mon stage, car ce cas est simple et il est possible d'obtenir une expression générale facilement. En outre, l'effet du genre est visible et facilement calculable. La TQFT permet de représenter le genre de la surface ce qui est intéressant, car c'est un invariant à ce type d'espaces géométriques. Il est bon de rappeler que les TQFTs sont utilisées pour ce but précis qui est de trouver des invariants.

5 Pour aller plus loin...

Ici, des informations complémentaires pour le lecteur souhaitant en apprendre d'avantage sur le sujet seront présentées. En premier lieu, la structure induite par les TQFTs de dimension 2 sur l'espace vectoriel associé à la composante de bords constituée d'une seule composante connexe sera exposée. Ensuite, de brèves précisions sur l'interprétation des TQFTs selon la théorie des catégories seront données. Finalement, si le lecteur souhaite encore plus de détails, il est invité à consulter le livre de Kock *Frobenius Algebras and 2D topological quantum field theories* [Koc04].

Au regard de l'exemple, il est possible de remarquer que la TQFT confère à l'espace vectoriel associé à la composante de bords constituée d'une composante connexe une structure algébrique particulière nommée *algèbre de Frobenius*. En effet, l'image du cobordisme avec deux composantes de bords entrant et une de type sortant est appelé *produit* et confère une structure d'algèbre pour l'espace vectoriel associé à la composante de bords composée d'une seule composante connexe. Ensuite, celle du cobordisme faisant le lien entre la composante de bords seule et la composante de bords vide , la *counité*, est ce qui se nomme la forme de Frobenius. Ainsi, la mise en commun de ces deux applications induit une structure d'algèbre de Frobenius sur l'espace vectoriel associé à la composante de bords formée d'une composante connexe. En d'autres termes, l'espace vectoriel $\Bbbk[G]$ accompagné par les applications linéaires $\mu : \Bbbk[G] \otimes \Bbbk[G] \to \Bbbk[G]$ et $\varepsilon : \Bbbk[G] \to \Bbbk$ a la structure d'une algèbre de Frobenius commutative. Dans les faits, il existe un théorème établissant une équivalence canonique entre les TQFTs de dimension 2 et les algèbres de Frobenius commutatives. La principale conséquence est la possibilité de comprendre des variétés qui sont des objets d'une certaine complexité en étudiant les algèbres de Frobenius qui sont, quant à elles, beaucoup plus connues et comprises. Alors, il faut en retenir que les TQFTs sont des règles de correspondances qui simplifient d'une certaine manière une structure géométrique. En ce sens, il est même possible de simplifier l'expression des TQFTs.

Les TQFTs sont le plus souvent exprimées dans les termes de la théorie des catégories, car les axiomes définissent une règle d'association propre à cette branche des mathématiques appelée *foncteur*. Un foncteur est une correspondance entre deux objets mathématiques appelés des *catégories*. Il y a donc un lien très étroit entre la théorie des catégories et les théories topologiques des champs quantiques. Dans le contexte présent, les catégories utilisées étaient la catégorie des cobordismes et celle des espaces vectoriels. En outre, les cobordismes présentés étaient de dimension 2, or il existe une catégorie et des TQFTs pour chaque dimension de cobordisme. De plus, les axiomes donnés pour définir une TQFT définissent précisément un foncteur monoïdal et symétrique. Sans entrer dans les détails, il est possible de remarquer que cette façon de définir une TQFT n'impose pas de restriction sur la catégorie but, la catégorie source étant toujours celle des cobordismes. D'ailleurs, trouver de nouvelles catégories buts pour lesquelles il existe un foncteur monoïdal et symétrique (TQFTs) entre elles et la catégorie des cobordismes est un sujet de recherche encore actif présentement. Considérant la puissance des théories topologiques des champs quantiques, il est naturel de vouloir étendre l'utilisation de cet outil à d'autres disciplines.

6 Conclusion

En somme, il a été montré que les théories topologiques des champs quantiques de dimension 2 sont des règles d'association entre les surfaces à bords appelées des variétés de dimension 2 et les espaces vectoriels. En outre, les conditions à respecter en dimension 2 pour être une TQFT peuvent être généralisées en axiomes qui se traduisent par un foncteur symétrique et monoïdal au sens de la théorie des catégories. De plus, l'exemple de TQFT en dimension 2 qui a été présenté a permis de démontrer la simplicité d'une TQFT en dimension 2 ainsi que l'effet du genre sur les expression lorsque le groupe est abélien. En dernier lieu, les liens des TQFTs avec les algèbres de Frobenius et la théorie des catégories ont été montrés.

L'intérêt pour les TQFTs est encore bien vivant dans la recherche en mathématiques. Beaucoup de découvertes sont à venir notamment par son implication dans les sciences quantiques. La simplicité que confère une TQFT à un problème complexe ne sera certainement pas négligeable pour les découvertes à venir.

Références

[Ati88] Michael Atiyah : Topological quantum field theories. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 68:175–186, 1988. `http://www.numdam.org/item/PMIHES_1988__68__175_0/`.

[Koc04] Joachim Kock : *Frobenius Algebras and 2D Topological Quantum Field Theories*. Numéro 59 de London Mathematical Society Student Texts. Cambridge university press, New York, 2004. ISBN 978-0-521-54031-5.

Zoïk Dubois
Département de mathématiques, Université de Sherbrooke
Courriel: Zoik.dubois@USherbrooke.ca