

# Algèbres de Poisson et courbes sur les surfaces

Benjamin Ouimette et Cassandra Guillemette

Reçu le 2022-03-01 et accepté le 2022-11-29

**RÉSUMÉ** Nous proposons une approche élémentaire aux crochets de Poisson sur certaines variétés de caractères de surfaces. L'outil fondamental est le crochet de Goldman défini sur les classes d'homotopie libres de courbes sur une surface.

## 1 Introduction

La mécanique hamiltonienne, introduite au 19ème siècle par W.R. Hamilton, est une manière de reformuler les lois de la physique newtonnienne où l'objet fondamental est la fonction d'énergie totale  $H$ , appelée *hamiltonien*. Notons par  $X$  l'espace des phases, qui est l'espace de toutes les configurations possibles d'un système physique. Chaque point  $x \in X$  contient l'information de la position et de la vitesse de chaque particule dans le système. On appelle une fonction lisse  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  une *observable*, et on note l'ensemble des observables par  $C^\infty(X)$ . Le hamiltonien  $H : X \rightarrow \mathbb{R}$  est donc un exemple d'observable. Un objet algébrique fondamental, le crochet de Poisson  $\{\cdot, \cdot\} : C^\infty(X) \times C^\infty(X) \rightarrow C^\infty(X)$ , permet d'écrire toutes les équations du mouvement de manière unifiée. Pour n'importe quelle observable  $f \in C^\infty(X)$  qui ne dépend pas explicitement du temps, l'évolution de la quantité  $f$  en fonction du temps est déterminée par l'équation différentielle

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\}. \quad (1)$$

Plus généralement, une *variété de Poisson* est une variété  $X$  dont l'algèbre de fonctions réelles  $C^\infty(X)$  est munie d'un crochet de Poisson  $\{\cdot, \cdot\}$ . Un *système dynamique hamiltonien* est un système dynamique sur une variété de Poisson défini par un hamiltonien  $H$  et l'équation de Hamilton (1).

Dans son article de 1986 [Gol86], Goldman a défini une structure de variété de Poisson sur la *variété de caractères* du groupe fondamental d'une surface vers

---

Nous tenons à remercier Jean-Philippe Burelle pour son aide et son enseignement précieux ayant permis la rédaction de cet article.

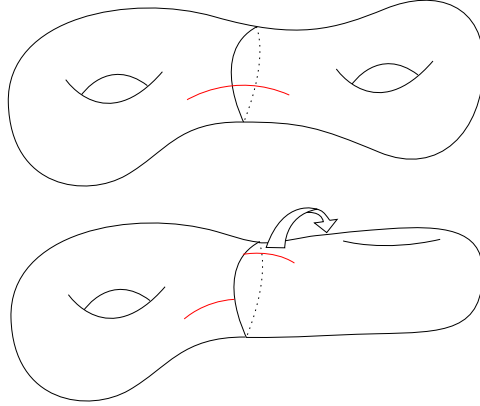


FIGURE 1 : Le « twist » d'une surface le long d'une courbe simple fermée.

un groupe de Lie. Étant donné une surface topologique  $\Sigma$  et un groupe de Lie  $G$ , la *variété de caractères* associée est la variété algébrique

$$\chi(\Gamma, G) := \text{Hom}(\Gamma, G) // G,$$

où  $\Gamma = \pi_1(\Sigma)$  et  $G$  agit par conjugaison sur  $\text{Hom}(\Gamma, G)$ . La double barre  $//$  représente le « quotient GIT », un type de quotient spécial qui permet de s'assurer que le quotient d'une variété algébrique par une action de groupe est toujours une variété algébrique [Dol03], mais la définition usuelle du quotient sera suffisante dans cet article.

Le crochet de Poisson sur l'espace des fonctions de la variété des caractères d'une surface contient beaucoup d'information géométrique. Par exemple, si le groupe de Lie d'arrivée est le groupe  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ , une des composantes de l'espace des représentations  $\chi(\pi_1(\Sigma), \text{SL}(2, \mathbb{R}))$  s'interprète comme l'espace des métriques hyperboliques sur  $\Sigma$ . Si l'on pose comme hamiltonien  $H$  une fonction de longueur, c'est-à-dire une fonction  $\ell_\gamma : \chi(\pi_1(\Sigma), \text{SL}(2, \mathbb{R})) \rightarrow \mathbb{R}$  qui associe à une courbe fermée simple  $\gamma$  sa longueur  $\ell_\gamma(\rho)$  dans la métrique associée à  $\rho$ , alors le flot associé est donné par un « twist » le long de  $\gamma$ , une opération qui garde la longueur de cette courbe invariante et « tourne » une moitié de la surface par rapport à l'autre (Figure 1).

Dans le même article, Goldman établit une formule pour le crochet de Poisson entre deux *fonctions de trace*, c'est-à-dire des fonctions qui associent à un homomorphisme  $\rho$  la trace de la matrice  $\rho(\gamma)$  pour un  $\gamma \in \Gamma$  fixé. Cette formule est une somme sur les points d'intersection entre les lacets qui définissent les fonctions de trace. Cette formule a inspiré la définition d'un *crochet de Lie* sur l'espace des classes d'homotopie libres de courbes sur une surface appelé *crochet de Goldman*. Ce crochet de Lie est d'intérêt indépendant et a été étudié dans plusieurs articles récents [Tur91, Cha04, Cha15, CK10].

Dans cet article, nous proposons une approche élémentaire à l'étude des crochets de Poisson sur les variétés de caractères pour les groupes  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$  et

$GL(2, \mathbb{C})$  basée sur la définition du crochet de Goldman. Nous utiliserons la formule de Goldman pour définir un crochet sur les algèbres de fonctions des variétés de caractères, et démontrerons qu'il s'agit bien d'un crochet de Poisson.

L'article est organisé comme suit. Dans la section 2, on décrira le groupe fondamental d'une surface et on abordera les notions d'homotopies et de conjugaison de courbes sur des surfaces. Ensuite, dans la troisième section, on présentera un objet central à notre article, soit le crochet de Goldman. Par la suite, la section 4 visera à présenter la notion d'algèbres de fonctions polynomiales sur une variété algébrique et l'espace vectoriel du produit tensoriel ainsi qu'un lien important entre ceux-ci donnée par la proposition 4.5. La section 4.1 abordera l'espace des homomorphismes entre un groupe de présentation fini et certains groupes algébriques d'intérêt puis les variétés de caractères correspondant à cet espace d'homomorphisme quotienté par le groupe. La section 4.2 présentera quant à elle certaines identités de trace se montrant utiles dans des calculs et des démonstrations de cet article. Pour continuer, la cinquième section visera à démontrer deux théorèmes portant sur des isomorphismes concernant la variété de caractères sur le groupe  $GL(2, \mathbb{C})$  et l'espace des fonctions polynomiales sur cette variété de caractères. Pour ce faire, la section 5.1 présentera l'action du groupe  $\chi(\Gamma, \{-1, 1\})$  ainsi que la définition d'une algèbre de fonctions  $G$ -invariantes. Dans la partie 5.2, on démontrera deux théorèmes importants. Puis la section 6 portera sur les crochets de Poisson qui ont un lien étroit avec le crochet de Goldman. Les sections 6.1, 6.2 et 6.3 viseront à montrer que le crochet de Goldman permet de définir un crochet de Poisson sur trois espaces.

## 2 Groupe fondamental

Soit  $X$  un espace topologique. Dans cet article, la plupart des espaces topologiques que nous étudierons seront des surfaces. Les exemples principaux seront le tore à un trou et la sphère à trois trous.

**Définition 2.1.** On appelle *lacet* sur  $X$  toute application continue  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  telle que  $\gamma(0) = \gamma(1)$ . Un lacet est donc un chemin fermé sur  $X$ . Notons par  $\mathfrak{L}(X, x_0)$  l'ensemble des lacets sur  $X$  tels que  $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$ . On dit alors que  $\gamma$  est basé en  $x_0$ .

**Définition 2.2.** Soient  $\gamma_1, \gamma_2$  deux chemins sur  $X$  tels que  $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ . La *concaténation* de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ , notée  $\gamma_1\gamma_2$ , est le chemin défini par

$$(\gamma_1\gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \gamma_2(2t - 1) & \text{si } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

On peut interpréter ceci comme étant le chemin suivant  $\gamma_1$  et ensuite  $\gamma_2$ .

**Définition 2.3.** Deux lacets  $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow X$  basés en  $x_0$  sont *homotopes* s'il existe une application continue  $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  telle que

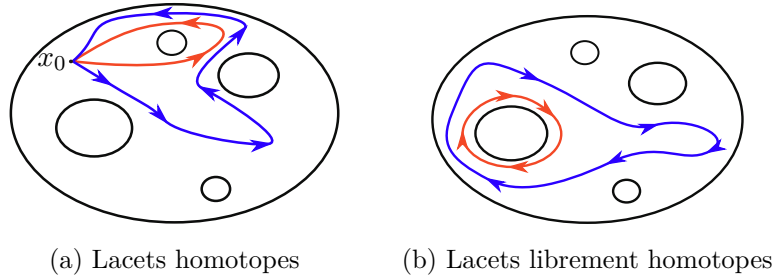


FIGURE 2 : Les deux notions d'homotopie entre deux lacets

1.  $h(t,0) = \gamma_1(t) \forall t \in [0,1]$  ;
2.  $h(t,1) = \gamma_2(t) \forall t \in [0,1]$  ;
3.  $h(0,s) = h(1,s) = x_0 \forall s \in [0,1]$ .

Ainsi, deux lacets sont homotopes si on peut déformer l'un de manière continue à l'autre, et on appelle l'application  $h$  une homotopie basée en  $x_0$ . On dit que deux lacets respectivement basés en  $x_0$  et  $y_0$  sont librement homotopes si la condition 3 est oubliée.

**Exemple 2.4.** On voit aux figures 2a et 2b respectivement un exemple d'une paire de lacets homotopes et d'une paire de lacets librement homotopes sur la sphère à cinq trous.

**Définition 2.5.** L'ensemble  $\mathfrak{L}(X, x_0) / \sim$  muni de l'opération de concaténation, où la relation d'équivalence est celle d'homotopie basée en  $x_0$ , forme un groupe, nommé le *groupe fondamental* de  $X$  basé en  $x_0$ . On le note  $\pi_1(X, x_0)$ .

Si  $X$  est connexe par arcs, alors  $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, y_0)$ . Alors on parle simplement de *groupe fondamental* et on le note simplement  $\pi_1(X)$ .

**Définition 2.6.** Deux lacets  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont *conjugués* si  $\exists \gamma \in \pi_1(X)$  tel que  $\gamma_1 = \gamma\gamma_2\gamma^{-1}$  où  $\gamma^{-1}$  est le lacet  $\gamma$  parcouru dans le sens contraire.

Notons par  $\pi$  l'ensemble des classes de conjugaison du groupe fondamental  $\pi_1(X)$ . La figure 2b peut être interprétée comme montrant deux représentants d'une classe de conjugaison de  $\pi_1(X)$ , tel que nous le comprendrons plus tard dans le théorème 2.8.

Les définitions suivantes vont nous permettre d'étudier les courbes sur des surfaces plus aisément.

**Définition 2.7.** Un *groupe libre* engendré par  $g$  générateurs se note  $F_g = \langle a_1, a_2, \dots, a_g \rangle$ . Ses éléments sont des mots réduits de l'alphabet

$$a_1, a_2, \dots, a_g, a_1^{-1}, a_2^{-1}, \dots, a_g^{-1}$$

et l'opération de groupe est la concaténation. Un mot *réduit* est un mot ne contenant pas un générateur et son inverse côte à côte. Par exemple,  $a_2 a_9^{-3} a_4^{-1}$  est un élément de  $F_{15}$ .

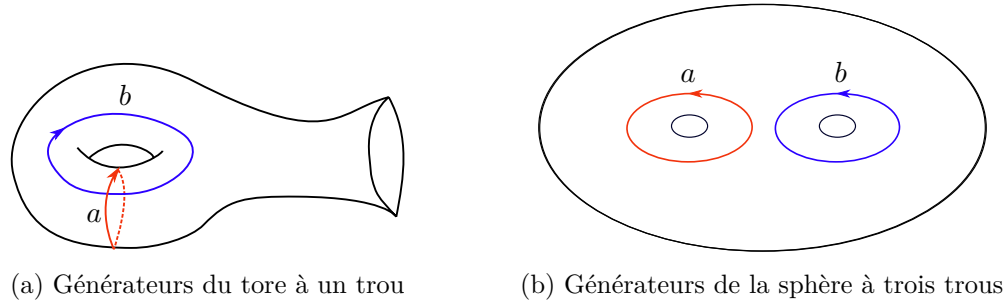


FIGURE 3 : Générateurs sur deux surfaces

Si  $\Sigma$  est une surface orientable avec au moins un bord, alors son groupe fondamental est libre à  $n$  générateurs où  $n = 2g + b - 1$ . Ici,  $g$  est le genre de la surface  $\Sigma$  et  $b$  est son nombre de bords[Cha15]. Ainsi, comme le tore à un trou a un bord et un genre et que la sphère à trois trous a trois bords et aucun genre, leur groupe fondamental est libre. En fait, pour ces deux surfaces, leur groupe fondamental est  $F_2 = \langle a, b \rangle$ . Les surfaces avec leurs générateurs  $a$  et  $b$  sont présentées à la figure 3.

**Théorème 2.8.** [Cha15, Corollaire 2.1] Soit  $\Sigma$  une surface connexe. Alors, il y a une bijection entre l'ensemble des classes d'homotopie libres des courbes orientées sur  $\Sigma$  et les éléments de  $\pi$ .

Enfin, on note par  $\mathbb{C}\pi$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des combinaisons linéaires d'éléments de  $\pi$ . Par exemple, sur le tore à un trou,  $(2 + i)ab - 4b^{-1} + 5ia^2b$  est un élément de  $\mathbb{C}[\pi]$  où  $ab, b^{-1}$  et  $a^2b$  sont ici des représentants de leur classe de conjugaison.

### 3 Crochet de Goldman

Dans cette section, nous définirons un *crochet de Lie* sur  $\mathbb{C}\pi$  qui a été défini en 1986 par W. Goldman [Gol86].

Notons qu'à partir d'ici, lorsque nous parlerons d'une courbe  $\gamma$ , le symbole  $\gamma$  représentera en fait une classe de conjugaison (donc une classe d'homotopie libre) dans  $\pi$ .

**Définition 3.1.** Une *algèbre de Lie*  $A$  est un espace vectoriel  $\mathfrak{g}$  sur un corps  $k$  muni d'une opération appelée *crochet de Lie*  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  qui est bilinéaire, antisymétrique, vérifie que  $\forall x \in A, [x, x] = 0$ , et satisfait l'identité de Jacobi, soit que  $\forall x, y, z \in A, [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ .

**Définition 3.2.** Le *crochet de Goldman orienté* est le crochet de Lie  $[\cdot, \cdot] : \mathbb{C}\pi \times \mathbb{C}\pi \rightarrow \mathbb{C}\pi$  défini par

$$[\gamma_1, \gamma_2] = \sum_{p_i \in \gamma_1 \cap \gamma_2} s_i \cdot (\gamma_1 \cdot_{p_i} \gamma_2).$$

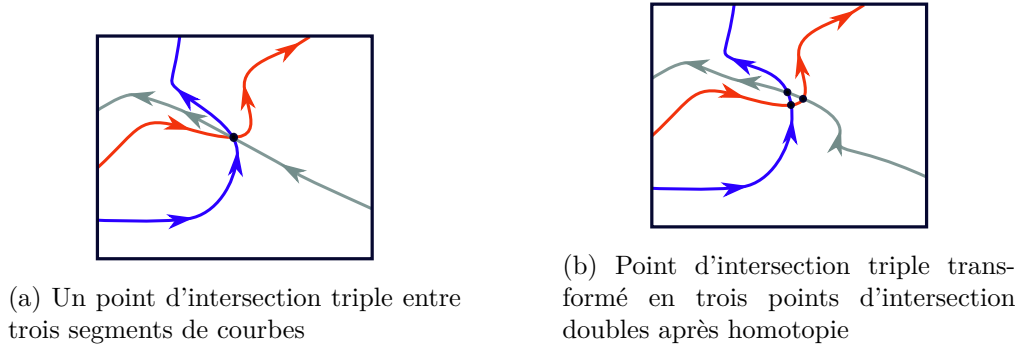


FIGURE 4 : Points d'intersection triple

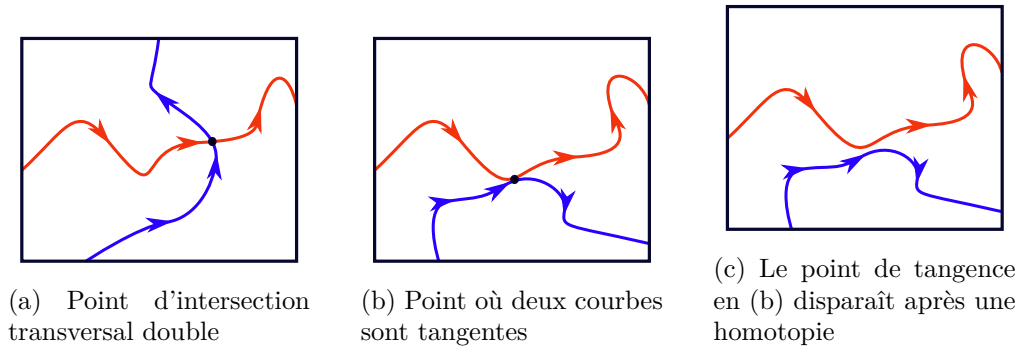
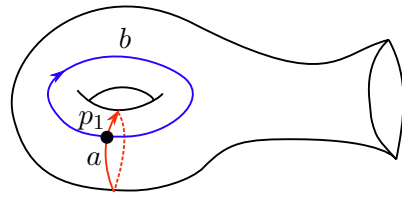


FIGURE 5 : Transversalité et tangence

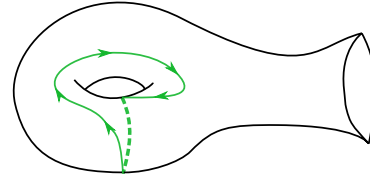
Ici, les  $p_i$  désignent les points d'intersection doubles transversaux entre des représentants de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ , c'est-à-dire les points d'intersection tels que les courbes ne sont pas tangentes en ces points et ne passent qu'une fois par ces points, signifiant qu'il n'y a pas de point correspondant à l'intersection de plus de deux segments de courbes. Ce dernier fait est toujours possible car on peut appliquer une homotopie sur les courbes afin que les points d'intersection entre deux courbes ne correspondent qu'à l'intersection de deux segments de courbes (par exemple voir la figure 4 pour transformer un point transversal de triple intersection en points transversaux de double intersection). Notons qu'on peut toujours appliquer une homotopie sur  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  pour qu'ils ne contiennent que des points d'intersection transversaux doubles (voir les figures 4 et 5). Aussi,  $\gamma_1 \cdot_{p_i} \gamma_2$  signifie la concaténation de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  au point  $p_i$ . Enfin, le signe  $s_i$  vaut  $+1$  si les vecteurs tangents aux chemins  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  en  $p_i$  forment une base orientée de l'espace tangent à la surface en  $p_i$ , et  $-1$  sinon (voir figure 9).

L'espace vectoriel  $\mathbb{C}\pi$  muni du crochet de Goldman orienté forme une algèbre de Lie [Gol86].

**Exemple 3.3.** Calculons le crochet de Goldman orienté sur le tore à un trou



(a) Point d'intersection entre les courbes  $a$  et  $b$



(b) Courbe  $ab$  résultant de la concaténation au point d'intersection

FIGURE 6 : Crochet de Goldman orienté des courbes  $a$  et  $b$  sur le tore à un trou

entre les courbes  $a$  et  $b$ . On obtient que

$$[a,b] = ab.$$

Cet exemple est présenté sur la figure 6.

**Exemple 3.4.** Calculons le crochet de Goldman orienté sur la sphère à trois trous entre les courbes  $a^2b$  et  $ab^{-1}$ . On trouve que

$$[a^2b, ab^{-1}] = -a^2bab^{-1} + aba^2b^{-1}.$$

Ce résultat se visualise sur la figure 7.

On peut également définir un crochet de Goldman non orienté. On note par  $\mathbb{C}\pi$  l'ensemble  $\mathbb{C}\pi / \sim$  où  $\gamma \sim \gamma^{-1}$ , et par  $\bar{\gamma}$  la classe d'équivalence d'un élément  $\gamma \in \mathbb{C}\pi$  dans  $\mathbb{C}\pi$ . Le crochet tel qu'énoncé ci-dessous est alors bien défini et satisfait aux axiomes d'un crochet de Lie.

**Définition 3.5.** Le *crochet de Goldman non orienté*, également noté  $[\cdot, \cdot]$  :  $\mathbb{C}\pi \times \mathbb{C}\pi \rightarrow \mathbb{C}\pi$ , est défini comme

$$[\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2] = \overline{\sum_{p_i \in \gamma_1 \cap \gamma_2} s_i \cdot (\gamma_1 \cdot_{p_i} \gamma_2 - \gamma_1 \cdot_{p_i} \gamma_2^{-1})}$$

où  $s_i$  est le facteur  $\pm 1$  désignant l'orientation au point  $p_i$  entre les représentants  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ .

Muni du crochet de Goldman non-orienté,  $\mathbb{C}\pi$  est aussi une algèbre de Lie.

**Exemple 3.6.** Reprenons l'exemple 3.3 mais cette fois-ci pour le calcul du crochet de Goldman non orienté. On a

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \overline{ab - ab^{-1}}.$$

La figure 8 présente la courbe supplémentaire  $ab^{-1}$  qui n'était pas présente dans la figure 6.

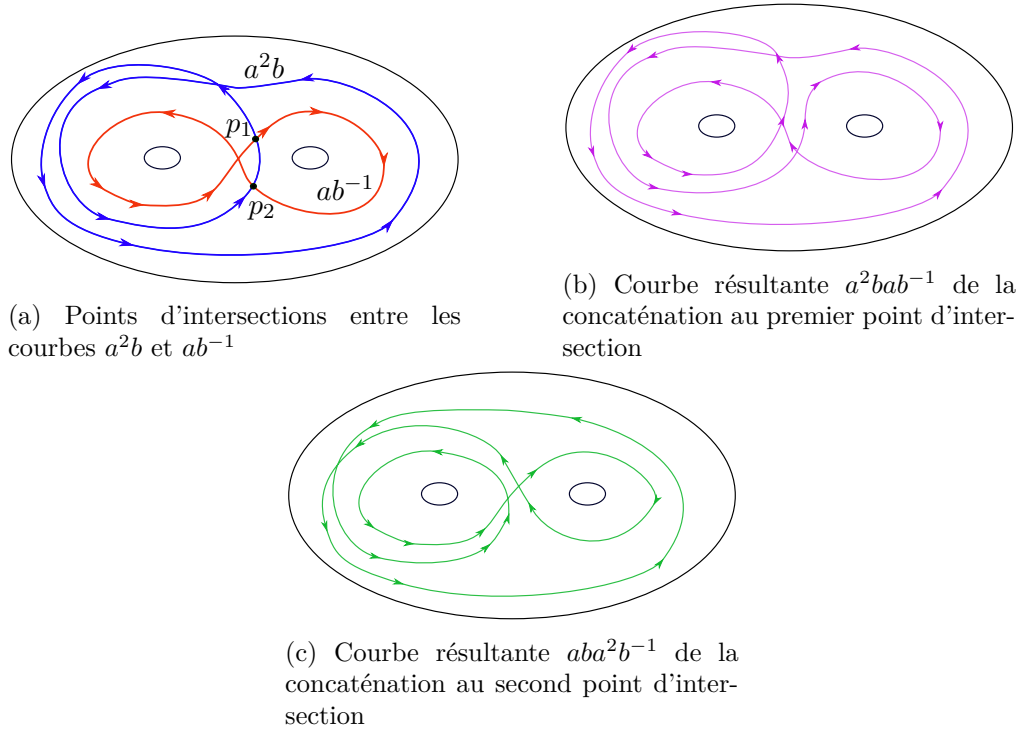


FIGURE 7 : Crochet de Goldman orienté des courbes  $a^2b$  et  $ab^{-1}$  sur la sphère à trois trous

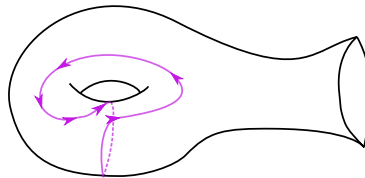
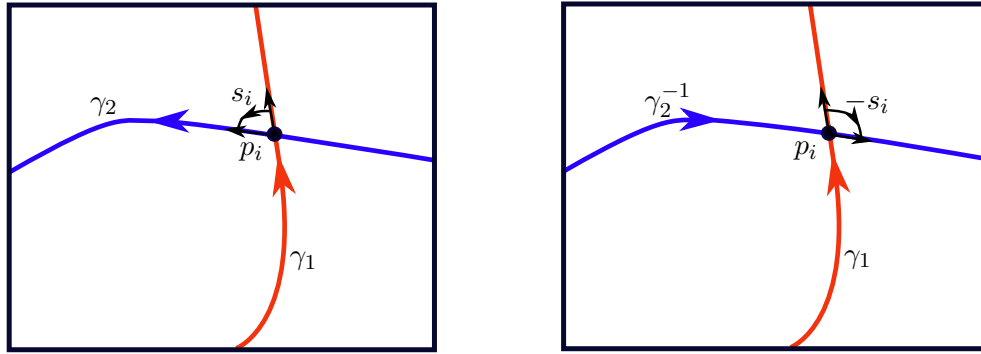


FIGURE 8 : Courbe  $ab^{-1}$



(a) Point d'intersection entre  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$

(b) Point d'intersection entre  $\gamma_1$  et  $\gamma_2^{-1}$

FIGURE 9 : Un point d'intersection entre  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  ou  $\gamma_2^{-1}$  et son signe associé

**Lemme 3.7.** *Il existe un représentant de  $\gamma_2^{-1}$  tel que les points d'intersection entre  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont les mêmes que ceux entre  $\gamma_1$  et  $\gamma_2^{-1}$ . De plus, le signe  $s_i$  associé au point d'intersection  $p_i$  dans le crochet  $[\gamma_1, \gamma_2]$  est opposé à celui associé au terme correspondant dans  $[\gamma_1, \gamma_2^{-1}]$ .*

*Démonstration.* Il suffit de considérer le même représentant de la classe de  $\gamma_2$  mais parcouru dans le sens inverse. Comme on peut le constater sur la figure 9, le fait de parcourir  $\gamma_2$  en sens inverse permet de conserver les mêmes points d'intersection mais modifie l'orientation à ce point.  $\square$

**Théorème 3.8.** *Soient  $\overline{\gamma_1}, \overline{\gamma_2} \in C\overline{\pi}$ . Alors,*

$$[\overline{\gamma_1}, \overline{\gamma_2}] = \overline{[\gamma_1, \gamma_2]} + [\gamma_1, \gamma_2^{-1}]$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} [\overline{\gamma_1}, \overline{\gamma_2}] &= \overline{\sum_{p_i \in \gamma_1 \cap \gamma_2} s_i \cdot (\gamma_1 \cdot p_i \cdot \gamma_2 - \gamma_1 \cdot p_i \cdot \gamma_2^{-1})} \\ &= \overline{\sum_{p_i \in \gamma_1 \cap \gamma_2} s_i \cdot \gamma_1 \cdot p_i \cdot \gamma_2} + \sum_{p_i \in \gamma_1 \cap \gamma_2^{-1}} (-s_i) \cdot \gamma_1 \cdot p_i \cdot \gamma_2^{-1} \text{ par le lemme 3.7} \\ &= \overline{[\gamma_1, \gamma_2]} + [\gamma_1, \gamma_2^{-1}] \text{ par le lemme 3.7} \end{aligned} \quad \square$$

## 4 Algèbres et variétés

**Définition 4.1.** Une algèbre  $A$  sur un corps commutatif  $k$ , ou  $k$ -algèbre, est une structure algébrique  $(A, +, \cdot, \times)$  telle que :

1.  $(A, +, \cdot)$  est un espace vectoriel sur  $k$  ;
2. la loi  $\times$  est définie de  $A \times A$  dans  $A$  (loi de composition interne) ;
3. la loi  $\times$  est bilinéaire.

Avant d'aborder le concept de variété de caractères, on doit considérer celui de variétés algébriques affines. Une variété algébrique affine est un sous-ensemble de  $\mathbb{C}^n$  défini par les zéros d'un ou plusieurs polynômes (dans cet article, toutes les variétés algébriques considérées seront affines). Par exemple,  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  est une variété algébrique de  $\mathbb{C}^4$  étant donné que ce groupe est formé des matrices de la forme  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  satisfaisant l'équation  $ad - bc - 1 = 0$ .

Le groupe  $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$  peut également être muni de la structure d'une variété algébrique dans  $\mathbb{C}^{n^2+1} \cong \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}$  définie par les zéros du polynôme  $p(M, z) = \det(M) \cdot z - 1$ . Nous donnons ci-dessous des définitions de géométrie algébrique qui seront utiles dans cet article (pour plus de détails voir par exemple [Bum98, Sha13]).

**Définition 4.2.** Soit  $V$  une variété algébrique dans  $\mathbb{C}^n$  définie par les polynômes  $p_1, \dots, p_r$ . Son *algèbre de fonctions polynomiales*, notée  $\mathbb{C}[V]$ , est l'algèbre quotient

$$\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/(p_1, \dots, p_r)$$

où  $(p_1, \dots, p_r)$  est l'idéal engendré par les  $r$  polynômes  $p_i$ .

Une *application polynomiale*  $f : V \rightarrow U$  entre deux variétés algébriques affines est la restriction d'une application polynomiale entre leurs espaces affines ambiants. Une application polynomiale induit un homomorphisme  $f^* : \mathbb{C}[U] \rightarrow \mathbb{C}[V]$  entre leurs algèbres de fonctions par précomposition. Deux variétés algébriques sont *isomorphes* s'il existe une application polynomiale d'inverse polynomiale entre les deux. Dans ce cas, leurs algèbres de fonctions sont isomorphes.

**Définition 4.3.** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels sur un corps commutatif  $k$ . Il existe un espace vectoriel appelé le *produit tensoriel de  $E$  et  $F$* , noté  $E \otimes F$ , et une application bilinéaire  $\phi : E \times F \rightarrow E \otimes F$  définie par  $\phi(x, y) = x \otimes y$  et ayant la propriété universelle suivante : pour tout espace vectoriel  $G$  sur  $k$  et pour toute application bilinéaire  $g : E \times F \rightarrow G$ , il existe une unique application linéaire  $\tilde{g} : E \otimes F \rightarrow G$  telle que  $g = \tilde{g} \circ \phi$ .

Si  $E$  et  $F$  sont munis d'une structure d'algèbre, alors  $E \otimes F$  est également une algèbre lorsque munie du produit  $(x_1 \otimes y_1)(x_2 \otimes y_2) = (x_1 x_2) \otimes (y_1 y_2)$ .

**Exemple 4.4.** Considérons le produit tensoriel de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^2$  avec lui-même. Ainsi, un élément  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$  de  $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$  peut s'écrire comme suit :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = ac \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + ad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + bc \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + bd \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que  $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^4$  avec la base donnée par  $e_i \otimes e_j$ .

Soient  $V_1 \subset \mathbb{C}^n$  et  $V_2 \subset \mathbb{C}^m$  deux variétés algébriques affines. Alors, leur produit  $V_1 \times V_2$  est naturellement une variété algébrique affine dans  $\mathbb{C}^{n+m}$ .

**Proposition 4.5** ([Bum98, Théorème 4.19]). *L'algèbre des fonctions polynomiales d'un produit de variétés est donnée par le produit tensoriel :*

$$\mathbb{C}[V_1 \times V_2] \cong \mathbb{C}[V_1] \otimes \mathbb{C}[V_2].$$

*L'isomorphisme est donné par la formule*

$$(f \otimes g)(u,v) = f(u)g(v).$$

#### 4.1 Variété de caractères

**Définition 4.6.** Un *groupe de présentation finie*  $\Gamma$  est un quotient d'un groupe libre  $F_g$  par un sous-groupe distingué engendré par un nombre fini d'éléments. On note

$$\Gamma = \langle s_1, \dots, s_g \mid r_1 = 1, \dots, r_n = 1 \rangle = \langle s_1, \dots, s_g \rangle / \langle r_1, \dots, r_n \rangle,$$

où  $r_j$  sont des mots dans les lettres  $s_i$ .

Soit  $\Gamma$  un groupe de présentation finie. L'ensemble des homomorphismes de  $\Gamma$  vers un groupe algébrique  $G$ , noté  $\text{Hom}(\Gamma, G)$ , est également une variété algébrique (voir par exemple [Dol03]). Ses éléments sont des homomorphismes qui sont chacun définis uniquement par l'image des générateurs de  $\Gamma$ . Au cours de cet article, nous nous concentrerons sur les groupes algébriques suivants :  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ ,  $\text{GL}(2, \mathbb{C})$  et  $\text{GL}(1, \mathbb{C})$ .

On définit la variété de caractères de  $\Gamma$  vers  $G$  par  $\chi(\Gamma, G) := \text{Hom}(\Gamma, G)/G$ , c'est-à-dire que deux homomorphismes  $\rho$  et  $\rho'$  sont en relation si et seulement si il existe un élément  $g \in G$  tel que  $\rho(\gamma) = g\rho'(\gamma)g^{-1}$ ,  $\forall \gamma \in \Gamma$ .

**Définition 4.7.** Soit  $\gamma \in \Gamma$  un élément quelconque et  $G$  un groupe algébrique de matrices. On définit les fonctions  $\text{tr}_\gamma, \det_\gamma : \chi(\Gamma, G) \rightarrow \mathbb{C}$  par  $\text{tr}_\gamma(\rho) = \text{tr}(\rho(\gamma))$  et  $\det_\gamma(\rho) = \det(\rho(\gamma))$ .

Pour  $\Gamma = F_2$  et  $G = \text{SL}(2, \mathbb{C})$ , la variété de caractères a une description particulièrement simple donnée par le théorème suivant :

**Théorème 4.8** ([Gol09]). *En tant que variétés algébriques,  $\chi(F_2, \text{SL}(2, \mathbb{C})) \cong \mathbb{C}^3$ . L'isomorphisme est donné par l'application  $\phi : \chi(F_2, \text{SL}(2, \mathbb{C})) \rightarrow \mathbb{C}^3$  définie par  $\phi(\rho) = (\text{tr}_a(\rho), \text{tr}_b(\rho), \text{tr}_{ab}(\rho))^t$ .*

**Théorème 4.9.** *En tant que variétés algébriques,  $\chi(F_2, \text{GL}(2, \mathbb{C})) \cong \mathbb{C}^3 \times (\mathbb{C}^*)^2 / \sim$  (voir par exemple [FL12]). On peut utiliser les coordonnées  $x = \text{tr}_a, y = \text{tr}_b, z = \text{tr}_{ab}, u = \det_a$  et  $v = \det_b$ . Dans ce cas, la relation d'équivalence  $\sim$  est donnée par :*

$$(x, y, z, u, v) \sim (-x, y, -z, -u, v) \sim (x, -y, -z, u, -v) \sim (-x, -y, z, -u, -v).$$

Plus généralement, on a le théorème suivant.

**Théorème 4.10** ([DCP17]). *Les algèbres des fonctions polynomiales sur les variétés de caractères  $\chi(\Gamma, \text{SL}(n, \mathbb{C}))$  et  $\chi(\Gamma, \text{GL}(n, \mathbb{C}))$  sont engendrées par l'ensemble des fonctions de trace  $\text{tr}_\gamma$ .*

## 4.2 Identités de traces

Le théorème 4.10 présente l'importance que prennent les fonctions de trace. Ainsi, présentons ici quelques identités et formules de traces de matrices qui nous seront utiles.

Rappelons d'abord que la fonction de trace est invariante par conjugaison, c'est-à-dire que  $\text{tr}(MAM^{-1}) = \text{tr}(A)$ . De plus,  $\forall A, B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ , on a que  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ .

**Théorème 4.11** (Théorème de Cayley-Hamilton). *Soit  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$  et soit  $p(X) = X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \dots + c_1X + c_0$ ,  $c_i \in \mathbb{C}$ , son polynôme caractéristique. Alors,  $p(A) = 0_{n \times n}$ .*

Au cours de cet article, nous nous intéresserons principalement aux matrices carrées de dimension deux. Nous considérerons surtout les deux groupes de matrices suivants, dont le premier est inclus dans le second :  $\text{SL}(2, \mathbb{C}) = \{A \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C}) \mid \det(A) = 1\}$  et  $\text{GL}(2, \mathbb{C}) = \{A \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C}) \mid \det(A) \neq 0\}$ . Ces groupes sont appelés respectivement le groupe spécial linéaire et le groupe général linéaire. De plus, nous utiliserons le groupe  $\text{GL}(1, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^*$ .

**Corollaire 4.12.** *Soit  $A \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ . Alors,  $A^2 - \text{tr}(A)A + \det(A)\mathbb{I} = 0$ .*

*Démonstration.* Le polynôme caractéristique de  $A$  est donné par :

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda\mathbb{I}) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc \\ &= \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A)\mathbb{I}. \end{aligned}$$

Ainsi, par le théorème 4.11, on a la conclusion souhaitée.  $\square$

Le corollaire 4.12 permet alors de prouver le résultat suivant.

**Théorème 4.13** (Identité de base). *Soient  $A, B \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$ . Alors,*

$$\text{tr}(A)\text{tr}(B) = \text{tr}(AB) + \det(A)\text{tr}(A^{-1}B).$$

*Démonstration.* À partir du corollaire 4.12, on a

$$\begin{aligned} 0 &= A^2 - \text{tr}(A)A + \det(A)\mathbb{I} \\ &= (BA^{-1})(A^2 - \text{tr}(A)A + \det(A)\mathbb{I}) \\ &= BA - \text{tr}(A)B + \det(A)BA^{-1} \\ \Rightarrow 0 &= \text{tr}(BA) - \text{tr}(A)\text{tr}(B) + \det(A)\text{tr}(BA^{-1}) \end{aligned}$$

d'où  $\text{tr}(A)\text{tr}(B) = \text{tr}(AB) + \det(A)\text{tr}(A^{-1}B)$ .  $\square$

Cette identité permet de simplifier les calculs de traces et sera amplement utilisée plus tard dans des preuves.

Voici un exemple d'une autre identité pouvant être déduite du corollaire 4.12.

**Exemple 4.14.**

$$\begin{aligned}
A^2 - \operatorname{tr}(A)A + \det(A)\mathbb{I} = 0 &\Rightarrow (A^2 - \operatorname{tr}(A)A + \det(A)\mathbb{I})B = 0 \cdot B \\
&\Rightarrow A^2B - \operatorname{tr}(A)AB + \det(A)B = 0 \\
&\Rightarrow \operatorname{tr}(A^2B) - \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(AB) + \det(A)\operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}(0) \\
&\Rightarrow \operatorname{tr}(A^2B) = \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(AB) - \det(A)\operatorname{tr}(B)
\end{aligned}$$

Remarquons que lorsqu'on travaille avec des matrices de  $\operatorname{SL}(2, \mathbb{C})$ , les identités sont largement simplifiées car les déterminants valent un.

## 5 Variété de caractères $\operatorname{GL}(2, \mathbb{C})$

Le but de cette section est d'établir un lien entre les variétés de caractères dans les groupes  $\operatorname{SL}(2, \mathbb{C})$ ,  $\mathbb{C}^*$ ,  $\{-1, 1\}$  et  $\operatorname{GL}(2, \mathbb{C})$ . Nous allons d'abord montrer le théorème qui suit :

**Théorème 5.1.** *Soit  $\Gamma = \pi_1(\Sigma)$  le groupe fondamental d'une surface. Alors,*

$$\chi(\Gamma, \operatorname{GL}(2, \mathbb{C})) \cong (\chi(\Gamma, \operatorname{SL}(2, \mathbb{C})) \times \chi(\Gamma, \mathbb{C}^*)) / \chi(\Gamma, \{-1, 1\}).$$

Nous en déduisons ensuite le théorème suivant :

**Théorème 5.2.** *Soit  $\Gamma = \pi_1(\Sigma)$  le groupe fondamental d'une surface. Alors,*

$$\mathbb{C}[\chi(\Gamma, \operatorname{GL}(2, \mathbb{C}))] \cong (\mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*)] \otimes \mathbb{C}[\chi(\Gamma, \operatorname{SL}(2, \mathbb{C}))])^{\chi(\Gamma, \{-1, 1\})}.$$

Les prochaines sous-sections vont fournir les outils permettant de démontrer ces théorèmes.

### 5.1 Action de groupe de $\chi(\Gamma, \{-1, 1\})$

L'intuition derrière le théorème 5.1 vient du fait qu'une matrice de  $\operatorname{GL}(2, \mathbb{C})$  peut s'écrire comme une matrice de  $\operatorname{SL}(2, \mathbb{C})$  multipliée par la racine de son déterminant, car pour  $M$  une matrice  $2 \times 2$  et  $k$  un scalaire,  $\det(kM) = k^2 \det(M)$ . Cependant, comme il y a deux choix de racines pour le déterminant, on doit d'abord aborder les homomorphismes de  $\Gamma$  vers le groupe multiplicatif  $\{-1, 1\}$ , noté  $\operatorname{Hom}(\Gamma, \{-1, 1\})$ . Cet ensemble est en fait un groupe multiplicatif pour l'opération  $(a * b)(w) = a(w) * b(w)$ .

On peut prouver aisément que  $\operatorname{Hom}(\Gamma, \{-1, 1\}) \cong \chi(\Gamma, \{-1, 1\})$  puisque pour  $\beta \in \operatorname{Hom}(\Gamma, \{-1, 1\})$  et  $w \in \Gamma$ ,  $(z\beta z^{-1})(w) = z\beta(w)z^{-1} = zz^{-1}\beta(w) = \beta(w) \forall z \in \mathbb{C}^*$ . Ainsi, chaque classe d'équivalence de  $\chi(\Gamma, \{-1, 1\})$  ne contient qu'un seul représentant.

On souhaite étudier l'action du groupe  $\chi(F_2, \{-1, 1\})$  sur les variétés  $\chi(F_2, \mathbb{C}^*)$ ,  $\chi(F_2, \operatorname{SL}(2, \mathbb{C}))$  et  $\chi(F_2, \mathbb{C}^*) \times \chi(F_2, \operatorname{SL}(2, \mathbb{C}))$ . Pour ce faire, définissons d'abord ce qu'est une action de groupe à gauche.

**Définition 5.3.** Soit  $G$  un groupe et  $X$  un ensemble. Alors, l'opérateur  $\star : G \times X \rightarrow X$  est une *action de groupe à gauche* sur  $X$  si :

1.  $g_1 \star (g_2 \star x) = (g_1 g_2) \star x \quad \forall g_1, g_2 \in G, \forall x \in X$  ;
2.  $e \star x = x \quad \forall x \in X$ , où  $e$  est l'élément neutre de  $G$ .

On dit que  $G$  agit sur  $X$ .

Il y a plusieurs manières de définir des actions de groupes à partir d'actions connues.

- Si  $G$  agit sur un ensemble  $S$ , alors il agit aussi sur n'importe quel ensemble de fonctions  $\text{Fon}(S, T)$ , pour  $T$  un ensemble quelconque. L'action est définie par  $(\beta \star f)(s) := f(\beta^{-1} \star s)$ . Par exemple, si  $G$  agit sur une variété  $V$ , alors il agit également sur son algèbre de fonctions polynomiales  $\mathbb{C}[V]$ .
- Si  $G$  agit sur deux ensembles  $S$  et  $T$ , alors  $G$  agit sur leur produit  $S \times T$  par  $\beta \star (s, t) := (\beta \star s, \beta \star t)$ .
- Si  $G$  agit sur les ensembles  $S$  et  $T$ , alors  $G$  agit sur  $\mathbb{C}[S] \otimes \mathbb{C}[T]$  par l'action  $\beta \star (f \otimes g) = \beta \star f \otimes \beta \star g$ .

**Définition 5.4.** Si  $G$  agit sur  $X$ , alors le *quotient*  $X/G$  est l'ensemble des classes d'équivalences  $X/\sim$ , où  $x \sim y \iff \exists g \in G$  tel que  $x = g \star y$ .

Soit  $G$  un groupe fini agissant sur une variété algébrique  $V$  par automorphismes polynomiaux. Alors, le quotient  $V/G$  est également muni d'une structure de variété algébrique naturelle [Sha13, p. 30 exemple 11]. Son algèbre de fonctions polynomiales est l'algèbre des invariants :

**Proposition 5.5.** Notons par  $\mathbb{C}[V]^G$  l'algèbre des fonctions  $G$ -invariantes sur  $V$ , c'est-à-dire des fonctions polynomiales  $f \in \mathbb{C}[V]$  telles que  $f(gx) = f(x)$  pour tout  $g \in G$ . Alors,

$$\mathbb{C}[V/G] \cong \mathbb{C}[V]^G.$$

Nous souhaitons maintenant définir une action du groupe  $\chi(\Gamma, \{-1, 1\})$  sur  $\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*) \times \chi(\Gamma, \text{SL}(2, \mathbb{C}))$ . Pour ce faire, nous aurons besoin des deux lemmes suivants. On définit  $\beta \star \sigma(w) := \beta(w)\sigma(w)$  pour  $\beta \in \text{Hom}(\Gamma, \{-1, 1\})$  et  $\sigma \in \text{Hom}(\Gamma, \text{SL}(2, \mathbb{C}))$ .

**Lemme 5.6.** Soient  $\beta \in \text{Hom}(\Gamma, \{-1, 1\})$  et  $\sigma \in \text{Hom}(\Gamma, \text{SL}(2, \mathbb{C}))$ . Alors,  $\beta \star \sigma \in \text{Hom}(\Gamma, \text{SL}(2, \mathbb{C}))$ .

*Démonstration.*

Montrons que  $\beta \star \sigma$  est bien un homomorphisme. Soient  $w_1, w_2 \in \Gamma$ . Alors,

$$\begin{aligned} (\beta \star \sigma)(w_1 w_2) &= \beta(w_1 w_2) \sigma(w_1 w_2) = \beta(w_1) \beta(w_2) \sigma(w_1) \sigma(w_2) \\ &= \beta(w_1) \sigma(w_1) \beta(w_2) \sigma(w_2) = (\beta \star \sigma)(w_1) (\beta \star \sigma)(w_2). \end{aligned}$$

Cela découle de la commutativité des éléments de  $\{-1, 1\}$  avec eux-mêmes et les matrices. Ensuite, puisque si  $A \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ , alors  $-A \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ , on a que  $\beta \star \sigma(w) = \beta(w)\sigma(w) \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ . Ainsi,  $\beta \star \sigma \in \text{Hom}(\Gamma, \text{SL}(2, \mathbb{C}))$ . Cela est équivalent à dire que  $\beta\sigma \in \text{Hom}(\Gamma, \text{SL}(2, \mathbb{C}))$ .  $\square$

**Lemme 5.7.** *L'application  $\star : \chi(\Gamma, \{-1, 1\}) \times \chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})) \rightarrow \chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$ , telle que  $(\beta, \sigma) \mapsto \beta \star \sigma = \beta \sigma$ , est bien définie.*

*Démonstration.*

On veut montrer que  $\beta \star \sigma \in \chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$ . Soit  $H\sigma H^{-1}$  un autre représentant de la classe d'équivalence de  $\sigma \in \chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$ , où  $H \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ . Alors,  $\forall w \in \Gamma$ ,  $\beta \star (H\sigma H^{-1})(w) = \beta(w)H\sigma(w)H^{-1} = H\beta(w)\sigma(w)H^{-1} = H(\beta \star \sigma)(w)H^{-1}$ .  $\square$

Par un raisonnement similaire, on peut montrer que  $\beta \star \eta \in \chi(\Gamma, \mathbb{C}^*)$ . Ainsi, l'application  $\star$  est bien définie pour  $\chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$  et  $\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*)$ . De plus, par un calcul de routine, on peut prouver qu'elle définit en fait une action de groupe sur ces deux espaces. On peut donc également faire agir  $\chi(\Gamma, \{-1, 1\})$  sur le produit d'algèbres  $\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*) \times \chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$  en agissant sur chacun des facteurs.

## 5.2 Isomorphisme avec le produit tensoriel

**Lemme 5.8.** *Soit  $\Gamma = \pi_1(\Sigma)$  et  $\eta : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}^*$  un homomorphisme. Alors, il existe une racine carrée de  $\eta$ , c'est-à-dire un homomorphisme  $\sqrt{\eta} : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}^*$  tel que  $\sqrt{\eta}^2 = \eta$ .*

*Démonstration.* Si  $\Sigma$  est à bord non vide, alors son groupe fondamental est libre à  $g$  générateurs  $a_1, \dots, a_g$ . On choisit arbitrairement une racine carrée  $\sqrt{\eta(a_i)}$  pour  $i = 1, \dots, g$  et ce choix s'étend uniquement en un homomorphisme  $\sqrt{\eta} : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}^*$ .

Si  $\Sigma$  est une surface fermée, alors son groupe fondamental a la présentation suivante :

$$\langle a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g \mid [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] \rangle,$$

où  $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$ . Encore une fois, en choisissant arbitrairement une racine carrée  $\sqrt{a_i}, \sqrt{b_i}$  on obtient un homomorphisme puisque

$$\sqrt{\eta(a_i)}\sqrt{\eta(b_i)}\sqrt{\eta(a_i)}^{-1}\sqrt{\eta(b_i)}^{-1} = 1. \quad \square$$

On peut maintenant démontrer le théorème 5.1.

*Démonstration du théorème 5.1.*

Considérons l'application

$$\psi : (\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*) \times \chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))) / \chi(\Gamma, \{-1, 1\}) \rightarrow \chi(\Gamma, \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})), \quad (\eta, \sigma) \mapsto \eta \sigma.$$

Montrons d'abord qu'elle est bien définie.

Soient  $w \in \Gamma$ ,  $\eta, \eta_1 \in \chi(\Gamma, \mathbb{C}^*)$  et  $\sigma, \sigma_1 \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$ .

Alors,

$$\begin{aligned} (\eta, \sigma) \sim (\eta_1, \sigma_1) &\iff \exists \beta \in \chi(\Gamma, \{-1, 1\}) \text{ et } N \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \\ &\text{tels que } (\eta, \sigma) = (\beta \star \eta_1, \beta \star N \sigma_1 N^{-1}). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\eta\sigma(w) &= \eta(w)\sigma(w) \\
&= \beta(w)\eta_1(w)\beta(w)N\sigma_1(w)N^{-1} \\
&= \beta(w)^2\eta_1(w)N\sigma_1(w)N^{-1} \\
&= N\eta_1(w)\sigma_1(w)N^{-1}
\end{aligned}$$

et comme  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \subseteq \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ , on a que  $N \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ , donc  $\eta\sigma \sim \eta_1\sigma_1$  et ainsi  $\psi$  est bien définie.

Également,  $\psi$  est un homomorphisme :

$$\begin{aligned}
\psi((\eta, \sigma))(w_1 w_2) &= (\eta\sigma)(w_1 w_2) = \eta(w_1 w_2)\sigma(w_1 w_2) = \eta(w_1)\eta(w_2)\sigma(w_1)\sigma(w_2) \\
&= \eta(w_1)\sigma(w_1)\eta(w_2)\sigma(w_2) = \psi((\eta, \sigma))(w_1)\psi((\eta, \sigma))(w_2).
\end{aligned}$$

Montrons maintenant l'injectivité de  $\psi$ . On a

$$\begin{aligned}
\psi((\eta, \sigma)) &\sim \psi((\eta_1, \sigma_1)) \\
&\iff \exists M \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) \text{ t.q. } \psi((\eta, \sigma)) \equiv M\psi((\eta_1, \sigma_1))M^{-1} \\
&\iff \psi((\eta, \sigma))(w) = M\psi((\eta_1, \sigma_1))(w)M^{-1}, \forall w \in \Gamma \\
&\Rightarrow \eta\sigma(w) = M\eta_1\sigma_1(w)M^{-1}, \forall w \in \Gamma \\
&\Rightarrow \eta(w)\sigma(w) = M\eta_1(w)\sigma_1(w)M^{-1}, \forall w \in \Gamma \\
&\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\eta(w)}{\eta_1(w)} & 0 \\ 0 & \frac{\eta(w)}{\eta_1(w)} \end{pmatrix} = \sigma^{-1}(w)M\sigma_1(w)M^{-1}, \forall w \in \Gamma.
\end{aligned}$$

En prenant le déterminant de chaque côté, on déduit l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} \frac{\eta_1(w)}{\eta(w)} & 0 \\ 0 & \frac{\eta_1(w)}{\eta(w)} \end{pmatrix} &= \det(\sigma^{-1}(w)M\sigma_1(w)M^{-1}) = 1, \forall w \in \Gamma \\
\Rightarrow \frac{\eta_1(w)^2}{\eta(w)^2} &= 1, \forall w \in \Gamma \\
\Rightarrow \eta_1(w)^2 &= \eta(w)^2, \forall w \in \Gamma \\
\Rightarrow \eta_1(w) &= \epsilon(w)\eta(w), \forall w \in \Gamma \text{ et où } \epsilon = \frac{\eta_1}{\eta} \in \chi(\Gamma, \{-1, 1\}).
\end{aligned}$$

Ainsi, de l'équation  $\eta(w)\sigma(w) = M\eta_1(w)\sigma_1(w)M^{-1}$ , on obtient en choisissant une racine carrée  $\sqrt{\det(M)}$  de  $\det(M)$  que

$$\begin{aligned}
\eta(w)\sigma(w) &= M(\epsilon(w)\eta(w))\sigma_1(w)M^{-1}, \forall w \in \Gamma \\
\Rightarrow \sigma(w) &= \epsilon(w)M\sigma_1(w)M^{-1}, \forall w \in \Gamma \\
&= \epsilon(w)\sqrt{\det(M)}\frac{M}{\sqrt{\det(M)}}\sigma_1(w)\sqrt{\det(M)}^{-1}\frac{M^{-1}}{\sqrt{\det(M)}^{-1}}, \forall w \in \Gamma \\
&= \epsilon(w)N\sigma_1(w)N^{-1}, \text{ où } N = \frac{M}{\sqrt{\det(M)}} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}).
\end{aligned}$$

Ainsi, l'homomorphisme  $\epsilon$  est tel que  $(\eta, \sigma) = (\epsilon \star \eta_1, \epsilon \star N\sigma_1 N^{-1})$ , i.e  $(\eta, \sigma) \sim (\eta_1, \sigma_1)$ . Ceci implique donc que  $\psi$  est bien injective.

Finalement, démontrons sa surjectivité. Soit  $\rho \in \chi(\Gamma, \text{GL}(2, \mathbb{C}))$  et choisissons une racine carrée de l'homomorphisme  $\det \circ \rho$ , qui existe par le lemme 5.8. Posons

$$(\eta, \sigma) = \left( \sqrt{\det(\rho)}, \frac{\rho}{\sqrt{\det(\rho)}} \right) \in (\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*) \times \chi(\Gamma, \text{SL}(2, \mathbb{C}))) / \chi(\Gamma, \{-1, 1\}).$$

Alors,  $\psi(\eta, \sigma)(w) = \eta\sigma(w) = \sqrt{\det(\rho(w))} \frac{\rho(w)}{\sqrt{\det(\rho(w))}} = \rho(w)$ ,  $\forall w \in \Gamma$  et donc  $\psi$  est surjective.  $\square$

On peut donc déduire le théorème 5.2 avec la justification suivante.

*Démonstration du théorème 5.2.*

Comme  $(\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*) \times \chi(\Gamma, \text{SL}(2, \mathbb{C}))) / \chi(\Gamma, \{-1, 1\}) \cong \chi(\Gamma, \text{GL}(2, \mathbb{C}))$  par le théorème 5.1, on a donc que les algèbres de fonctions polynomiales sur ces variétés de caractères sont isomorphes, c'est-à-dire que

$$\mathbb{C}[\chi(\Gamma, \text{GL}(2, \mathbb{C}))] \cong \mathbb{C}[(\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*) \times \chi(\Gamma, \text{SL}(2, \mathbb{C}))) / \chi(\Gamma, \{-1, 1\})].$$

On déduit ainsi des propositions 4.5 et 5.5 que

$$\mathbb{C}[\chi(\Gamma, \text{GL}(2, \mathbb{C}))] \cong \mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*)] \otimes \mathbb{C}[\chi(\Gamma, \text{SL}(2, \mathbb{C}))]^{\chi(\Gamma, \{-1, 1\})}. \quad \square$$

## 6 Crochets de Poisson

Nous allons maintenant définir l'outil principal sur lequel porte notre article : le crochet de Poisson sur l'algèbre des fonctions d'une variété de caractères. On doit d'abord définir ce qu'est une algèbre de Poisson.

**Définition 6.1.** Une *algèbre de Poisson*  $P$  est une algèbre munie d'un crochet de Poisson, noté  $\{\cdot, \cdot\}$ , qui est un crochet de Lie satisfaisant de plus la règle de Leibniz, c'est-à-dire que  $\{f \times g, h\} = f \times \{g, h\} + g \times \{f, h\}$ ,  $\forall f, g, h \in P$ .

En général, dans cet article, le crochet de Poisson est l'application  $\{\cdot, \cdot\} : \mathbb{C}[V] \times \mathbb{C}[V] \rightarrow \mathbb{C}[V]$ , où  $V$  est une variété algébrique. Une façon de le définir est la suivante :  $\{f, g\} = \langle \nabla f \times \nabla g, H \rangle$ , où  $H$  est une fonction compatible avec le produit scalaire et  $\nabla$  désigne la fonction du gradient qui est bien définie sur les algèbres de fonctions polynomiales  $\mathbb{C}[V]$ . On notera que le vecteur  $H$  change dépendamment de la surface sur laquelle on travaille. Le but de cet article est de prouver qu'en définissant une nouvelle application de  $\mathbb{C}[V] \times \mathbb{C}[V]$  dans  $\mathbb{C}[V]$  à l'aide du crochet de Goldman, cette définition satisfera les propriétés d'un crochet de Poisson. Nous nous intéresserons notamment aux crochets de Poisson sur  $\mathbb{C}[\chi(\Gamma, \text{SL}(2, \mathbb{C}))]$ ,  $\mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*)]$  et  $\mathbb{C}[\chi(\Gamma, \text{GL}(2, \mathbb{C}))]$ .

Nous présentons ici les définitions usuelles des crochets de Poisson sur les trois espaces mentionnés précédemment. Dans les sections 6.1, 6.2 et 6.3, nous montrerons que le crochet de Goldman permet de définir des crochets de Poisson sur ces algèbres.

**Définition 6.2.** Le crochet de Poisson

$$\{\cdot, \cdot\} : \mathbb{C}[\chi(F_2, \text{SL}(2, \mathbb{C}))] \times \mathbb{C}[\chi(F_2, \text{SL}(2, \mathbb{C}))] \rightarrow \mathbb{C}[\chi(F_2, \text{SL}(2, \mathbb{C}))]$$

est défini ainsi :

$$\{\text{tr}_u, \text{tr}_v\} = \langle \nabla \text{tr}_u \times \nabla \text{tr}_v, H \rangle = \left| \nabla \text{tr}_u \quad \nabla \text{tr}_v \quad H \right|$$

où  $\times$  désigne le produit vectoriel usuel dans  $\mathbb{C}^3$ . Comme  $\chi(F_2, \text{SL}(2, \mathbb{C})) \cong \mathbb{C}^3$ ,  $\text{tr}_u$  et  $\text{tr}_v$  peuvent être vues comme des fonctions de  $\mathbb{C}^3$  vers  $\mathbb{C}$ . Par exemple, sur le tore à un trou,  $H(x, y, z) = (2x - yz, 2y - xz, 2z - xy)^t$ , où  $x = \text{tr}_a(\sigma)$ ,  $y = \text{tr}_b(\sigma)$ ,  $z = \text{tr}_{ab}(\sigma)$ .

**Exemple 6.3.** Calculons le crochet de Poisson entre les fonctions  $\text{tr}_{a^2}$  et  $\text{tr}_b$  sur le tore à un trou dans  $\mathbb{C}[\chi(F_2, \text{SL}(2, \mathbb{C}))] \times \mathbb{C}[\chi(F_2, \text{SL}(2, \mathbb{C}))]$ .

Soit  $\sigma \in \chi(F_2, \text{SL}(2, \mathbb{C}))$ . Par la définition 6.2, on a :

$$\begin{aligned} \{\text{tr}_{a^2}, \text{tr}_b\} &= \{\text{tr}_a^2 - 2, \text{tr}_b\} \text{ par application du théorème 4.13} \\ &= \{x^2 - 2, y\} \\ &= \begin{vmatrix} 2x & 0 & 2x - yz \\ 0 & 1 & 2y - xz \\ 0 & 0 & 2z - xy \end{vmatrix} \\ &= 2x(2z - xy) \\ &= 4xz - 2x^2y. \end{aligned}$$

**Définition 6.4.** Le crochet de Poisson

$$\{\cdot, \cdot\} : \mathbb{C}[\chi(F_2, \text{GL}(2, \mathbb{C}))] \times \mathbb{C}[\chi(F_2, \text{GL}(2, \mathbb{C}))] \rightarrow \mathbb{C}[\chi(F_2, \text{GL}(2, \mathbb{C}))]$$

est défini par

$$\{\text{tr}_u, \text{tr}_v\} = \langle \nabla \text{tr}_u \times \nabla \text{tr}_v, H \rangle.$$

On définit ici le produit vectoriel dans  $\mathbb{C}^5$  par

$$r \times s = (v_{1,2}, v_{1,3}, v_{1,4}, v_{1,5}, v_{2,3}, v_{2,4}, v_{2,5}, v_{3,4}, v_{3,5}, v_{4,5})^t, \text{ où } v_{i,j} = r_i s_j - r_j s_i.$$

On sait par le théorème 4.9 que  $\chi(F_2, \text{GL}(2, \mathbb{C})) \cong \mathbb{C}^3 \times (\mathbb{C}^*)^2 / \sim$ . Pour le tore à un trou,

$$H(x, y, z, u, v) = (z, -yu + xz, 0, xv, xv - yz, -yu, 0, -zu, zv, 2uv)^t.$$

**Définition 6.5.** Le crochet de Poisson

$$\{\cdot, \cdot\} : \mathbb{C}[\chi(F_2, \text{GL}(1, \mathbb{C}))] \times \mathbb{C}[\chi(F_2, \text{GL}(1, \mathbb{C}))] \rightarrow \mathbb{C}[\chi(F_2, \text{GL}(1, \mathbb{C}))]$$

est défini par

$$\{\text{tr}_u, \text{tr}_v\} = \langle \nabla \text{tr}_u \times \nabla \text{tr}_v, H \rangle.$$

Pour le tore à un trou,  $H = (\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z})^t$ , où  $x = \text{tr}_a$ ,  $y = \text{tr}_b$  et  $z = \text{tr}_{a^{-1}b^{-1}}$ .

Nous arrivons maintenant au théorème principal qui motive cet article. Il permettra de définir de nouveaux crochets sur  $\mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*)]$ ,  $\mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))]$  et  $\mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}))]$  et de démontrer que ce sont des crochets de Poisson qui font de nos espaces des algèbres de Poisson.

**Théorème 6.6.** [Gol86]

1. Soit  $V = \chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$ . Alors,

$$\mathrm{tr}_{[\bar{u}, \bar{v}]} = \{\mathrm{tr}_u, \mathrm{tr}_v\}.$$

2. Soit  $V = \chi(\Gamma, \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}))$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors,

$$\mathrm{tr}_{[u, v]} = \{\mathrm{tr}_u, \mathrm{tr}_v\}.$$

**Exemple 6.7.** On peut vérifier le théorème 6.6 sur l'exemple 6.3. En effet, le crochet de Goldman non orienté entre les courbes  $a^2$  et  $b$  est :

$$[a^2, b] = 2(a^2b - a^2b^{-1}).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}_{[a^2, b]} &= 2\mathrm{tr}_{a^2b - a^2b^{-1}} \\ &= 2(\mathrm{tr}_{a^2b} - \mathrm{tr}_{a^2b^{-1}}) \\ &= 2(\mathrm{tr}_{a^2b} - (\mathrm{tr}_{a^2}\mathrm{tr}_b - \mathrm{tr}_{a^2b})) \\ &= 2(2\mathrm{tr}_{a^2b} - \mathrm{tr}_b(\mathrm{tr}_a^2 - 2)) \\ &= 4\mathrm{tr}_a\mathrm{tr}_{ab} - 4\mathrm{tr}_b - 2\mathrm{tr}_b\mathrm{tr}_a^2 + 4\mathrm{tr}_b \\ &= 4\mathrm{tr}_a\mathrm{tr}_{ab} - 2\mathrm{tr}_b\mathrm{tr}_a^2 \\ &= 4xz - 2x^2y. \end{aligned}$$

On a donc bien  $\{\mathrm{tr}_{a^2}, \mathrm{tr}_b\} = \mathrm{tr}_{[a^2, b]}$ .

À priori, il n'est pas clair que la trace du crochet de Goldman est un crochet de Poisson pour ces différents espaces. C'est ce que nous démontrerons dans ce qui suit.

### 6.1 Crochet de Poisson sur $\mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))]$

En s'inspirant du théorème 6.6, on souhaite démontrer le théorème suivant :

**Théorème 6.8.** Soit  $\Gamma = \pi_1(\Sigma)$  le groupe fondamental d'une surface. Alors, l'application

$$\{\cdot, \cdot\}_{\mathrm{SL}} : \mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))] \times \mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))] \rightarrow \mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))]$$

définie par

$$\{\mathrm{tr}_u, \mathrm{tr}_v\}_{\mathrm{SL}} := \mathrm{tr}_{[\bar{u}, \bar{v}]}$$

et étendue par linéarité est un crochet de Poisson.

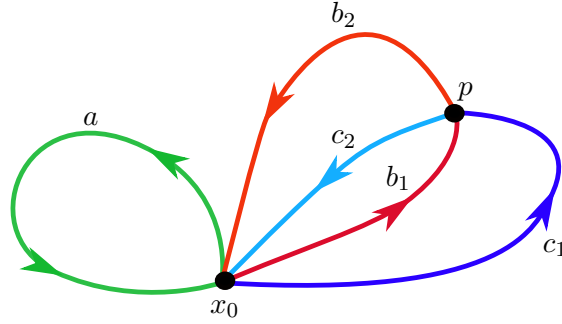


FIGURE 10 : Séparation des courbes  $ab$  (ou  $ba$ ) et  $c$  par un point d'intersection entre  $b$  (en rouge) et  $c$  (en bleu)

Grâce à l'identité de matrices dans  $SL(2, \mathbb{C})$  suivante :

$$\text{tr}(A)\text{tr}(B) = \text{tr}(AB) + \text{tr}(A^{-1}B),$$

on déduit que l'algèbre  $\mathbb{C}[\chi(\Gamma, SL(2, \mathbb{C}))]$  est engendrée en tant qu'espace vectoriel par les fonctions de traces. Ainsi,  $\{\cdot, \cdot\}_{SL}$  est bien définie.

Avant de présenter la démonstration du théorème 6.8, nous présentons une proposition et un lemme.

**Lemme 6.9.** *Soient  $b, c \in \pi_1(\Sigma, x_0)$  et  $p \in b \cap c$  un point d'intersection. Alors,  $\exists g \in \pi_1(\Sigma, x_0)$  tel que  $\forall a \in \pi_1(\Sigma, x_0)$ ,  $ab \cdot_p c \sim bageg^{-1}$ . En particulier, si  $a = id$ , alors  $b \cdot_p c \sim bgeg^{-1}$ . De même,  $\exists h \in \pi_1(\Sigma, x_0)$  tel que  $\forall a \in \pi_1(\Sigma, x_0)$ ,  $ba \cdot_p c \sim bahch^{-1}$  et  $b \cdot_p c \sim bhch^{-1}$ .*

*Démonstration.* L'idée de la preuve peut se visualiser sur la figure 10. On a que le point  $p$  sépare les courbes  $b$  et  $c$  en deux segments, le premier reliant  $x_0$  et  $p$  en suivant la courbe  $b$  ou  $c$  puis le second reliant  $p$  et  $x_0$  en suivant la courbe  $b$  ou  $c$ . On notera ces segments pour  $b$  et  $c$  respectivement  $b_1$  et  $b_2$  et  $c_1$  et  $c_2$ . On a donc que  $b_1b_2 = b$  et  $c_1c_2 = c$ . Ainsi,

$$ab \cdot_p c \sim b_1(b_2ab_1c_2c_1)b_1^{-1} = bab_1c_2c_1b_1^{-1} = bab_1c_2c_1c_2c_2^{-1}b_1^{-1} = bageg^{-1}$$

où  $g = b_1c_2$ . De plus,

$$b \cdot_p c \sim b_1(b_2b_1c_2c_1)b_1^{-1} = bb_1c_2c_1c_2c_2^{-1}b_1^{-1} = bgcb^{-1}.$$

L'idée de la preuve pour  $ba \cdot_p c$  est similaire et laissée au lecteur.  $\square$

**Lemme 6.10.** *Soient  $u, v, w \in \pi_1(\Sigma) = \Gamma$ . Choisissons des représentants de  $u, v$  et  $w$  de sorte qu'il n'y ait pas d'intersection triple (Figure 4). Si  $p$  est un point d'intersection entre les courbes  $u$  et  $w$ , alors*

$$\text{tr}_{uv \cdot_p w} + \text{tr}_{uv^{-1} \cdot_p w} = \text{tr}_v \text{tr}_{u \cdot_p w}.$$

*Si  $q$  est un point d'intersection entre  $v$  et  $w$ , alors*

$$\text{tr}_{uv \cdot_q w} + \text{tr}_{uv^{-1} \cdot_q w} = \text{tr}_u \text{tr}_{v \cdot_q w}.$$

*Démonstration.* Pour  $p$  un point d'intersection entre  $u$  et  $w$ , on peut écrire  $uw \cdot_p w = uz w z^{-1}$ ,  $u \cdot_p w = uz w z^{-1}$  et  $uw^{-1} \cdot_p w = uv^{-1} z w z^{-1}$  pour  $z \in \Gamma$  par le lemme 6.9. Ainsi, soit  $\sigma \in \chi(\Gamma, \text{SL}(2, \mathbb{C}))$  tel que  $\sigma(u) = U, \sigma(v) = V, \sigma(w) = W$  et  $\sigma(z) = Z$ . Alors,  $\sigma(uw \cdot_p w) = UVZWZ^{-1}$ ,  $\sigma(u \cdot_p w) = UZWZ^{-1}$  et  $\sigma(uw^{-1} \cdot_p w) = UV^{-1}ZWZ^{-1}$ . On a donc

$$\begin{aligned} \text{tr}(\sigma(uw \cdot_p w)) + \text{tr}(\sigma(uw^{-1} \cdot_p w)) &= \text{tr}(UVZWZ^{-1}) + \text{tr}(UV^{-1}ZWZ^{-1}) \\ &= \text{tr}(VZWZ^{-1}U) + \text{tr}(V^{-1}ZWZ^{-1}U) \\ &= \text{tr}(V)\text{tr}(ZWZ^{-1}U) \\ &= \text{tr}(V)\text{tr}(UZWZ^{-1}) \\ &= \text{tr}(\sigma(v))\text{tr}(\sigma(u \cdot_p w)). \end{aligned}$$

De façon similaire, on prouve la seconde équation pour  $q$  un point d'intersection entre  $v$  et  $w$ .  $\square$

On peut maintenant prouver que la fonction définie au théorème 6.8 est un crochet de Poisson.

*Démonstration du théorème 6.8.* Soient  $\text{tr}_u, \text{tr}_v, \text{tr}_w \in \mathbb{C}[\chi(\Gamma, \text{SL}(2, \mathbb{C}))]$ . Alors,  $\exists U, V, W \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$  tels que  $\text{tr}_u(\sigma) = U$ ,  $\text{tr}_v(\sigma) = V$  et  $\text{tr}_w(\sigma) = W$  pour  $\sigma \in \chi(\Gamma, \text{SL}(2, \mathbb{C}))$ . Démontrons que notre crochet satisfait les quatre propriétés d'un crochet de Poisson.

1. La bilinéarité est satisfaite par définition.
2. Antisymétrie :

$$\{\text{tr}_u, \text{tr}_v\}_{\text{SL}} = \text{tr}_{[\bar{u}, \bar{v}]} = \text{tr}_{-[\bar{v}, \bar{u}]} = -\text{tr}_{[\bar{v}, \bar{u}]} = -\{\text{tr}_v, \text{tr}_u\}_{\text{SL}}.$$

3. Règle de Leibniz

Soit  $\sigma \in \chi(\Gamma, \text{SL}(2, \mathbb{C}))$ . En utilisant le représentant de  $v^{-1}$  qui a la même image que  $v$  mais parcourue en sens inverse, les points d'intersection entre  $uv$  et  $w$  sont les mêmes que ceux entre  $uv^{-1}$  et  $w$ . On peut également supposer que  $u, v$  et  $w$  n'ont pas de point d'intersection commun. On obtient

$$\begin{aligned} \{\text{tr}_u \text{tr}_v, \text{tr}_w\}_{\text{SL}}(\sigma) &= \{\text{tr}_{uv+uv^{-1}}, \text{tr}_w\}_{\text{SL}}(\sigma) \\ &= \text{tr}(\sigma([\overline{uv + uv^{-1}}, \bar{w}])) \\ &= \text{tr}(\sigma([\overline{uv}, \bar{w}] + [\overline{uv^{-1}}, \bar{w}])) \\ &= \text{tr} \left( \sum_{p_i \in uv \cap w} s_i \cdot \sigma(uv \cdot_{p_i} w - uv \cdot_{p_i} w^{-1}) \right) \\ &\quad + \text{tr} \left( \sum_{p_i \in uv^{-1} \cap w} r_i \cdot \sigma(uv^{-1} \cdot_{p_i} w - uv^{-1} \cdot_{p_i} w^{-1}) \right) \\ &= \sum_{p_i \in uv \cap w} s_i \cdot (\text{tr}(\sigma(uv \cdot_{p_i} w)) - \text{tr}(\sigma(uv \cdot_{p_i} w^{-1}))) \\ &\quad + \sum_{p_i \in uv^{-1} \cap w} r_i \cdot (\text{tr}(\sigma(uv^{-1} \cdot_{p_i} w)) - \text{tr}(\sigma(uv^{-1} \cdot_{p_i} w^{-1}))) \end{aligned}$$

Séparons les points d'intersection  $p_i$  de  $uv \cap w$  en deux ensembles disjoints  $\{p_{1j}\}$  et  $\{p_{2k}\}$  contenant respectivement les points d'intersection entre  $u$  (et  $u^{-1}$ ) et  $w$  et entre  $v$  (et  $v^{-1}$ ) et  $w$ . Les signes  $s_i$  et  $r_i$  satisfont  $s_i = r_i$  si  $p_i \in u \cap w$  et  $s_i = -r_i$  si  $p_i \in v \cap w$  par le lemme 3.7. En notant  $s_{1j}$  et  $s_{2k}$  les signes aux points d'intersection  $p_{1j}$  et  $p_{2k}$ , on obtient donc,

$$\begin{aligned} \{\mathrm{tr}_u \mathrm{tr}_v, \mathrm{tr}_w\}_{\mathrm{SL}}(\sigma) &= \sum_{p_{1j} \in u \cap w} s_{1j} \cdot (\mathrm{tr}(\sigma(uv \cdot_{p_{1j}} w)) - \mathrm{tr}(\sigma(uv \cdot_{p_{1j}} w^{-1}))) \\ &\quad - \mathrm{tr}(\sigma(uv^{-1} \cdot_{p_{1j}} w)) + \mathrm{tr}(\sigma(uv^{-1} \cdot_{p_{1j}} w^{-1}))) \\ &+ \sum_{p_{2k} \in v \cap w} s_{2k} \cdot (\mathrm{tr}(\sigma(uv \cdot_{p_{2k}} w)) - \mathrm{tr}(\sigma(uv \cdot_{p_{2k}} w^{-1}))) \\ &\quad - \mathrm{tr}(\sigma(uv^{-1} \cdot_{p_{2k}} w)) + \mathrm{tr}(\sigma(uv^{-1} \cdot_{p_{2k}} w^{-1}))). \end{aligned}$$

Considérons maintenant la première somme. Par le lemme 6.10, on a que

$$\begin{aligned} &\sum_{p_{1j} \in u \cap w} s_{1j} \left( \mathrm{tr}(\sigma(uv \cdot_{p_{1j}} w)) - \mathrm{tr}(\sigma(uv \cdot_{p_{1j}} w^{-1})) \right. \\ &\quad \left. + \mathrm{tr}(\sigma(uv^{-1} \cdot_{p_{1j}} w)) - \mathrm{tr}(\sigma(uv^{-1} \cdot_{p_{1j}} w^{-1})) \right) \\ &= \mathrm{tr}_v(\sigma) \sum_{p_{1j} \in u \cap w} s_{1j} \left( \mathrm{tr}(\sigma(u \cdot_{p_{1j}} w)) - \mathrm{tr}(\sigma(u \cdot_{p_{1j}} w^{-1})) \right) \\ &= \mathrm{tr}_v \mathrm{tr}_{[\bar{u}, \bar{w}]}(\sigma) = \mathrm{tr}_v \{\mathrm{tr}_u, \mathrm{tr}_w\}_{\mathrm{SL}}(\sigma). \end{aligned}$$

De même, on montre que

$$\begin{aligned} &\sum_{p_{2k} \in v \cap w} s_{2k} \left( \mathrm{tr}(\sigma(uv \cdot_{p_{2k}} w)) - \mathrm{tr}(\sigma(uv \cdot_{p_{2k}} w^{-1})) \right. \\ &\quad \left. + \mathrm{tr}(\sigma(uv^{-1} \cdot_{p_{2k}} w)) - \mathrm{tr}(\sigma(uv^{-1} \cdot_{p_{2k}} w^{-1})) \right) \\ &= \mathrm{tr}_u \mathrm{tr}_{[\bar{v}, \bar{w}]}(\sigma) = \mathrm{tr}_u \{\mathrm{tr}_v, \mathrm{tr}_w\}_{\mathrm{SL}}(\sigma). \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien que  $\{\mathrm{tr}_u \mathrm{tr}_v, \mathrm{tr}_w\}_{\mathrm{SL}} = \mathrm{tr}_u \{\mathrm{tr}_v, \mathrm{tr}_w\}_{\mathrm{SL}} + \mathrm{tr}_v \{\mathrm{tr}_u, \mathrm{tr}_w\}_{\mathrm{SL}}$ .

#### 4. Identité de Jacobi

$$\begin{aligned} &\{\mathrm{tr}_u, \{\mathrm{tr}_v, \mathrm{tr}_w\}_{\mathrm{SL}}\}_{\mathrm{SL}} + \{\mathrm{tr}_v, \{\mathrm{tr}_w, \mathrm{tr}_u\}_{\mathrm{SL}}\}_{\mathrm{SL}} + \{\mathrm{tr}_w, \{\mathrm{tr}_u, \mathrm{tr}_v\}_{\mathrm{SL}}\}_{\mathrm{SL}} \\ &= \{\mathrm{tr}_u, \mathrm{tr}_{[\bar{v}, \bar{w}]} \}_{\mathrm{SL}} + \{\mathrm{tr}_v, \mathrm{tr}_{[\bar{w}, \bar{u}]} \}_{\mathrm{SL}} + \{\mathrm{tr}_w, \mathrm{tr}_{[\bar{u}, \bar{v}]} \}_{\mathrm{SL}} \\ &= \mathrm{tr}_{[\bar{u}, [\bar{v}, \bar{w}]]} + \mathrm{tr}_{[\bar{v}, [\bar{w}, \bar{u}]]} + \mathrm{tr}_{[\bar{w}, [\bar{u}, \bar{v}]]} \\ &= \mathrm{tr}_{[\bar{u}, [\bar{v}, \bar{w}]] + [\bar{v}, [\bar{w}, \bar{u}]] + [\bar{w}, [\bar{u}, \bar{v}]]} \\ &= 0 \end{aligned}$$

car le crochet de Goldman non-orienté satisfait l'identité de Jacobi.

Ainsi,  $\{\cdot, \cdot\}_{\mathrm{SL}}$  est bel et bien un crochet de Poisson.  $\square$

Grâce à ce résultat, on peut montrer que cette nouvelle définition du crochet de Poisson pour  $\mathbb{C}[\chi(F_2, \text{SL}(2, \mathbb{C}))]$  pour le tore à un trou est équivalente à celle donnée par la définition 6.2.

**Théorème 6.11.** *Soient  $u, v \in F_2$ . Alors, pour le tore à un trou, les deux crochets de Poisson*

$$\{\text{tr}_u, \text{tr}_v\} = \left| \nabla \text{tr}_u \quad \nabla \text{tr}_v \quad H(x, y, z) \right|,$$

où  $H(x, y, z) = (2x - yz, 2y - xz, 2z - xy)^t$ , et

$$\{\text{tr}_u, \text{tr}_v\}_{\text{SL}} = \text{tr}_{[\bar{u}, \bar{v}]}$$

sont égaux. On note ici que  $x = \text{tr}_a, y = \text{tr}_b$  et  $z = \text{tr}_{ab}$ .

*Démonstration.* Comme  $x, y$  et  $z$  engendrent  $\mathbb{C}[\chi(F_2, \text{SL}(2, \mathbb{C}))]$  (théorème 4.8), il suffit de montrer que les deux crochets  $\{\cdot, \cdot\}$  et  $\{\cdot, \cdot\}_{\text{SL}}$  prennent les mêmes valeurs sur les paires de générateurs  $(x, y), (y, z)$  et  $(x, z)$ . En effet, si deux crochets de Poisson sont égaux sur leurs générateurs, alors ils sont identiquement égaux (grâce à la règle de Leibniz). On montre ici la vérification de l'égalité pour la paire  $(x, y)$ . Les calculs pour les deux autres couples sont laissés en exercices. D'une part,

$$\{x, y\} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2x - yz \\ 0 & 1 & 2y - xz \\ 0 & 0 & 2z - xy \end{vmatrix} = 2z - xy$$

et, d'autre part,

$$\{x, y\}_{\text{SL}} = \text{tr}_{[\bar{a}, \bar{b}]} = \text{tr}_{ab-b^{-1}a} = \text{tr}_{ab} - (\text{tr}_a \text{tr}_b - \text{tr}_{ab}) = 2z - xy.$$

Ainsi,  $\{\cdot, \cdot\} = \{\cdot, \cdot\}_{\text{SL}}$  pour le tore à un trou. Ceci est équivalent à  $\text{tr}_{[\bar{v}, \bar{w}]} = \{\text{tr}_v, \text{tr}_w\}$ .  $\square$

## 6.2 Crochet de Poisson sur $\mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*)]$

Dans le même ordre d'idées que dans la section 6.1, on veut démontrer le théorème suivant.

**Théorème 6.12.** *L'application  $\{\cdot, \cdot\}_{\mathbb{C}^*} : \mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*)] \times \mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*)] \rightarrow \mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*)]$  définie par*

$$\{\text{tr}_u, \text{tr}_v\}_{\mathbb{C}^*} := \text{tr}_{[u, v]}$$

*et étendue par linéarité est un crochet de Poisson.*

Remarquons que puisque  $\text{tr}(\eta(u)) = \eta(u)$  pour  $\eta \in \chi(\Gamma, \mathbb{C}^*)$ , la définition appliquée à  $\eta$  peut se réécrire comme  $\{\text{tr}_u, \text{tr}_v\}_{\mathbb{C}^*}(\eta) = \eta([u, v])$ .

Nous énonçons maintenant un lemme qui nous aidera à démontrer ce théorème.

**Lemme 6.13.** Soit  $\eta \in \chi(\Gamma, \mathbb{C}^*)$  et  $u, v \in \Gamma$ . Alors,

$$\eta([u, v]) = \sum_{p_i \in u \cap v} s_i \cdot \eta(uv).$$

*Démonstration.*

D'abord, on remarque que  $\eta(w_1)\eta(w_2) = \eta(w_2)\eta(w_1)$ ,  $\forall w_1, w_2 \in \Gamma$  puisque  $\eta(w_1), \eta(w_2) \in \mathbb{C}^*$ . Ainsi, par le lemme 6.9,  $\exists w_i \in \Gamma$  tel qu'on a

$$\eta(u \cdot_i v) = \eta(uw_i v w_i^{-1}) = \eta(u)\eta(w_i)\eta(v)\eta(w_i^{-1}) = \eta(u)\eta(v).$$

Par abus de notation, nous noterons maintenant  $\cdot_{p_i}$  par  $\cdot_i$ . Par conséquent, on obtient que

$$\eta([u, v]) = \eta\left(\sum_{p_i \in u \cap v} s_i \cdot (u \cdot_i v)\right) = \sum_{p_i \in u \cap v} s_i \cdot \eta(u \cdot_i v) = \sum_{p_i \in u \cap v} s_i \cdot \eta(uv). \quad \square$$

On peut maintenant démontrer le théorème 6.12.

*Démonstration du théorème 6.12.*

Montrons que  $\{\cdot, \cdot\}_{\mathbb{C}^*}$  satisfait les quatre axiomes d'un crochet de Poisson.

1. Bilinéarité : On a cette propriété par définition de notre crochet.
2. Antisymétrie : Elle découle directement de l'antisymétrie du crochet de Goldman.
3. Règle de Leibniz : Soit  $\eta \in \chi(\Gamma, \mathbb{C}^*)$ . Notons d'abord que

$$\{\eta(u)\eta(v), \eta(w)\}_{\mathbb{C}^*} = \{\eta(uv), \eta(w)\}_{\mathbb{C}^*}$$

puisque  $\eta$  est un homomorphisme. On veut ainsi montrer que

$$\begin{aligned} \{\eta(u)\eta(v), \eta(w)\}_{\mathbb{C}^*} &= \eta(u)\{\eta(v), \eta(w)\}_{\mathbb{C}^*} + \eta(v)\{\eta(u), \eta(w)\}_{\mathbb{C}^*} \\ \iff \eta([uv, w]) &= \eta(u)\eta([v, w]) + \eta(v)\eta([u, w]) \end{aligned}$$

Or, par le lemme 6.13, cela est équivalent à montrer que

$$\begin{aligned} \sum_{p_i \in uv \cap w} s_i \cdot \eta(uvw) &= \eta(u) \sum_{q_j \in v \cap w} s_j \cdot \eta(vw) + \eta(v) \sum_{r_k \in u \cap w} s_k \cdot \eta(uw) \\ \iff \sum_{p_i \in uv \cap w} s_i \cdot \eta(uvw) &= \sum_{q_j \in v \cap w} s_j \cdot \eta(uvw) + \sum_{r_k \in u \cap w} s_k \cdot \eta(uvw) \end{aligned}$$

et cette dernière égalité est vraie car les points d'intersection  $p_i$  des courbes  $uv$  et  $w$  peuvent se séparer en deux ensembles disjoints  $\{q_j | q_j \in v \cap w\}$  et  $\{r_k | r_k \in u \cap w\}$  pour de bons représentants. De plus, chaque signe  $s_i$  correspond à un signe  $s_j$  ou un signe  $s_k$  selon l'ensemble auquel appartient  $p_i$ .

4. Identité de Jacobi :

$$\begin{aligned}
& \{\mathrm{tr}_u, \{\mathrm{tr}_v, \mathrm{tr}_w\}_{\mathbb{C}^*}\}_{\mathbb{C}^*} + \{\mathrm{tr}_v, \{\mathrm{tr}_w, \mathrm{tr}_u\}_{\mathbb{C}^*}\}_{\mathbb{C}^*} + \{\mathrm{tr}_w, \{\mathrm{tr}_u, \mathrm{tr}_v\}_{\mathbb{C}^*}\}_{\mathbb{C}^*} \\
&= \mathrm{tr}_{[u, [v, w]]} + \mathrm{tr}_{[v, [w, u]]} + \mathrm{tr}_{[w, [u, v]]} \\
&= \mathrm{tr}_{[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]]} \\
&= \mathrm{tr}_0, \text{ car le crochet de Goldman satisfait l'identité de Jacobi} \\
&= 0. \quad \square
\end{aligned}$$

Ainsi, on a défini un crochet de Poisson  $\{\cdot, \cdot\}_{\mathbb{C}^*}$  sur l'algèbre de fonctions polynomiales  $\mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*)]$ , ce qui en fait une algèbre de Poisson.

### 6.3 Crochet de Poisson sur $\mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}))]$

On veut maintenant démontrer le théorème suivant :

**Théorème 6.14.** *L'application*

$$\{\cdot, \cdot\}_{\mathrm{GL}} : \mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}))] \times \mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}))] \rightarrow \mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}))]$$

définie par

$$\{\mathrm{tr}_u, \mathrm{tr}_v\}_{\mathrm{GL}} := \mathrm{tr}_{[u, v]}$$

est un crochet de Poisson.

Comme on a montré au théorème 5.2 que

$$(\mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*)] \otimes \mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))])^{\chi(\Gamma, \{-1, 1\})} \cong \mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}))],$$

commençons par montrer qu'on peut définir un crochet de Poisson sur l'espace  $\mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*)] \otimes \mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))]^{\chi(\Gamma, \{-1, 1\})}$  dans le but d'étudier la relation entre le crochet de Poisson sur cet algèbre et l'application définie au théorème 6.14 sur l'algèbre  $\mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}))]$ .

#### 6.3.1 Crochet de Poisson sur le produit tensoriel

Dans cette section, nous montrerons que  $(\mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*)] \otimes \mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))])^{\chi(\Gamma, \{-1, 1\})}$  est une algèbre de Poisson. D'abord, considérons la proposition suivante :

**Proposition 6.15.** *Si  $A$  et  $B$  sont deux algèbres de Poisson, alors  $A \otimes B$  l'est aussi, avec le crochet bilinéaire défini par :*

$$\{a_1 \otimes b_1, a_2 \otimes b_2\}_{A \otimes B} := \{a_1, a_2\}_A \otimes b_1 b_2 + a_1 a_2 \otimes \{b_1, b_2\}_B$$

sur les tenseurs simples.

*Démonstration.* Rappelons que le produit tensoriel de deux algèbres est également une algèbre (définition 4.3). Il reste donc à montrer que les quatre axiomes d'un crochet de Poisson sont satisfaits.

1. La bilinéarité suit de la définition.

2. Antisymétrie :

$$\begin{aligned}
\{a_1 \otimes b_1, a_2 \otimes b_2\}_{A \otimes B} &= \{a_1, a_2\}_A \otimes b_1 b_2 + a_1 a_2 \otimes \{b_1, b_2\}_B \\
&= -\{a_2, a_1\}_A \otimes b_1 b_2 + a_1 a_2 \otimes -\{b_2, b_1\}_B \\
&= -(\{a_2, a_1\}_A \otimes b_2 b_1 + a_2 a_1 \otimes \{b_2, b_1\}_B) \\
&= -\{a_2 \otimes b_2, a_1 \otimes b_1\}_{A \otimes B}
\end{aligned}$$

3. Règle de Leibniz :

$$\begin{aligned}
&\{(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2), a_3 \otimes b_3\}_{A \otimes B} \\
&= \{a_1 a_2 \otimes b_1 b_2, a_3 \otimes b_3\}_{A \otimes B} \\
&= \{a_1 a_2, a_3\}_A \otimes (b_1 b_2) b_3 + (a_1 a_2) a_3 \otimes \{b_1 b_2, b_3\}_B \\
&= (a_1 \{a_2, a_3\}_A + a_2 \{a_1, a_3\}_A) \otimes b_1 b_2 b_3 \\
&\quad + a_1 a_2 a_3 \otimes (b_1 \{b_2, b_3\}_B + b_2 \{b_1, b_3\}_B) \\
&= (a_1 \otimes b_1) (\{a_2, a_3\}_A \otimes b_2 b_3 + a_2 a_3 \otimes \{b_2, b_3\}_B) \\
&\quad + (a_2 \otimes b_2) (\{a_1, a_3\}_A \otimes b_1 b_3 + a_1 a_3 \otimes \{b_1, b_3\}_B) \\
&= \{a_1 \otimes b_1, a_3 \otimes b_3\}_{A \otimes B} (a_2 \otimes b_2) + (a_1 \otimes b_1) \{a_2 \otimes b_2, a_3 \otimes b_3\}_{A \otimes B}
\end{aligned}$$

4. Identité de Jacobi : Cette partie de la preuve est laissée au plaisir du lecteur.

Les quatre propriétés sont donc vérifiées et on a bien que  $A \otimes B$  est une algèbre de Poisson.  $\square$

Dans les sections 6.2 et 6.1, on a montré que  $\mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*)]$  et  $\mathbb{C}[\chi(\Gamma, \text{SL}(2, \mathbb{C}))]$  sont des algèbres de Poisson avec respectivement  $\{\text{tr}_u, \text{tr}_v\}_{\mathbb{C}^*} = \text{tr}_{[u, v]}$  ainsi que  $\{\text{tr}_u, \text{tr}_v\}_{\text{SL}} = \text{tr}_{[\bar{u}, \bar{v}]}$  pour crochets de Poisson. Ainsi, par la proposition 6.15, on peut faire de l'algèbre  $O = \mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*)] \otimes \mathbb{C}[\chi(\Gamma, \text{SL}(2, \mathbb{C}))]$  une algèbre de Poisson en définissant sur celle-ci le crochet de Poisson suivant :  $\{\cdot, \cdot\}_{\otimes} : O \times O \rightarrow O$  tel que

$$\{\text{tr}_u \otimes \text{tr}_v, \text{tr}_w \otimes \text{tr}_x\}_{\otimes} = \frac{1}{2} (\{\text{tr}_u, \text{tr}_w\}_{\mathbb{C}^*} \otimes \text{tr}_v \text{tr}_x + \text{tr}_u \text{tr}_w \otimes \{\text{tr}_v, \text{tr}_x\}_{\text{SL}}).$$

Le facteur  $\frac{1}{2}$  ne change pas le fait que la définition ci-dessus reste un crochet de Poisson. Nous verrons plus tard l'importance de ce facteur.

**Définition 6.16.** Une application de Poisson entre deux algèbres de Poisson  $A$  et  $B$  est une application linéaire  $T : A \rightarrow B$  qui préserve les crochets :  $T\{a_1, a_2\} = \{T(a_1), T(a_2)\}$ .

Rappelons que nous avons défini un isomorphisme

$$(\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*) \times \chi(\Gamma, \text{SL}(2, \mathbb{C}))) / \chi(\Gamma, \{-1, 1\}) \cong \chi(\Gamma, \text{GL}(2, \mathbb{C}))$$

grâce à l'application

$$\psi : (\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*) \times \chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))) / \chi(\Gamma, \{-1, 1\}) \rightarrow \chi(\Gamma, \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}))$$

définie par  $\psi((\eta, \sigma)) = \eta\sigma$  (Section 5.2). Or, on sait que si  $f : X \rightarrow Y$  est un isomorphisme, alors l'isomorphisme entre  $\mathbb{C}[X]$  et  $\mathbb{C}[Y]$  est  $f^* : \mathbb{C}[Y] \rightarrow \mathbb{C}[X]$  défini sur une fonction polynomiale  $q \in \mathbb{C}[Y]$  par  $f^*q(x) = q(f(x))$ . Ainsi, on a l'isomorphisme

$$\psi^* : \mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}))] \rightarrow \mathbb{C}[(\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*) \times \chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))) / \chi(\Gamma, \{-1, 1\})]$$

tel que

$$(\psi^*q)(\eta, \sigma) \mapsto q(\psi(\eta, \sigma)) = q(\eta\sigma),$$

où  $\eta \in \chi(\Gamma, \mathbb{C}^*)$  et  $\sigma \in \chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$ . Or, on sait par les propositions 4.5 et 5.5 que l'algèbre

$$(\mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*)] \otimes \mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))])^{\chi(\Gamma, \{-1, 1\})}$$

est isomorphe à l'algèbre

$$\mathbb{C}[(\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*) \times \chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))) / \chi(\Gamma, \{-1, 1\})].$$

En utilisant cet isomorphisme, un élément du produit tensoriel définit une fonction sur une paire d'homomorphismes par la formule

$$(f \otimes g)(\eta, \sigma) \mapsto f(\eta)g(\sigma).$$

Dorénavant, on identifiera implicitement ces deux espaces de fonctions en évaluant un élément du produit tensoriel sur une paire  $(\eta, \rho)$  sans mentionner l'isomorphisme. Nous voulons vérifier que cet isomorphisme envoie l'application  $\{\cdot, \cdot\}_{\mathrm{GL}}$  au crochet de Poisson  $\{\cdot, \cdot\}_{\otimes}$ . Puisque l'algèbre  $\mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}))]$  est engendrée par l'ensemble  $\{\mathrm{tr}_u \mid u \in \Gamma\}$  (Théorème 4.10), on veut donc définir  $\psi^*$  sur ces fonctions. On a que

$$(\psi^*\mathrm{tr}_u)(\eta, \sigma) = \mathrm{tr}_u(\psi(\eta, \sigma)) = \mathrm{tr}_u(\eta\sigma) = \mathrm{tr}_u(\eta)\mathrm{tr}_u(\sigma).$$

Avec l'isomorphisme vers  $(\mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*)] \otimes \mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))])^{\chi(\Gamma, \{-1, 1\})}$ , le résultat est envoyé vers  $(\mathrm{tr}_u \otimes \mathrm{tr}_u)(\eta, \sigma)$ .

**Définition 6.17.** On définit l'isomorphisme

$$\psi^* : \mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}))] \rightarrow (\mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*)] \otimes \mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))])^{\chi(\Gamma, \{-1, 1\})}$$

par

$$(\psi^*\mathrm{tr}_u) = \mathrm{tr}_u \otimes \mathrm{tr}_u.$$

On écrira par abus de notation que

$$(\psi^*\mathrm{tr}_u)(\eta, \sigma) = (\mathrm{tr}_u \otimes \mathrm{tr}_u)(\eta, \sigma) = \eta(u)\mathrm{tr}_u(\sigma).$$

### 6.3.2 Crochet de Poisson $\{, \}_{\text{GL}}$

Nous sommes maintenant prêts à prouver que le crochet  $\{, \}_{\text{GL}}$  défini par

$$\{\text{tr}_u, \text{tr}_v\}_{\text{GL}} := \text{tr}_{[u,v]}$$

est bien un crochet de Poisson. Pour ce faire, nous vérifierons que

$$\psi^* \{\text{tr}_u, \text{tr}_v\}_{\text{GL}} = \{\psi^* \text{tr}_u, \psi^* \text{tr}_v\}_{\otimes}.$$

Puisqu'on sait déjà que  $\{, \}_{\otimes}$  satisfait la règle de Leibniz, on déduira que  $\{, \}_{\text{GL}}$  aussi. Avant d'y arriver, nous avons besoin du lemme suivant.

**Lemme 6.18.** *Soit  $\sigma \in \chi(\Gamma, \text{SL}(2, \mathbb{C}))$  et  $u, v \in \Gamma$ . Alors,*

$$\text{tr}_{[u,v]+[u,v^{-1}]}(\sigma) = (2\text{tr}_{[u,v]} - \sum_{p_i \in u \cap v} s_i \cdot \text{tr}_u \text{tr}_v)(\sigma).$$

*Démonstration.*

Notons d'abord qu'on peut écrire l'identité  $\text{tr}(U)\text{tr}(V) = \text{tr}(UV) + \text{tr}(UV^{-1})$  de  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$  comme

$$\text{tr}(U)\text{tr}(WVW^{-1}) = \text{tr}(UWVW^{-1}) + \text{tr}(UWV^{-1}W^{-1}),$$

où  $W \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ , en raison de l'invariance de la trace par la conjugaison. Ainsi, en utilisant notamment le lemme 3.7, on a le calcul suivant :

$$\begin{aligned} & \text{tr}(\sigma([u,v])) + \text{tr}(\sigma([u,v^{-1}])) \\ &= \text{tr} \left( \sigma \left( \sum_{p_i \in u \cap v} s_i \cdot (u \cdot_i v) \right) \right) + \text{tr} \left( \sigma \left( \sum_{p_i \in u \cap v^{-1}} (-s_i) \cdot (u \cdot_i v^{-1}) \right) \right) \\ &= \text{tr} \left( \sigma \left( \sum_{p_i \in u \cap v} s_i \cdot (uw_i v w_i^{-1}) \right) \right) - \text{tr} \left( \sigma \left( \sum_{p_i \in u \cap v^{-1}} s_i \cdot (uw_i v^{-1} w_i^{-1}) \right) \right) \\ &= \sum_{p_i \in u \cap v} s_i \cdot (\text{tr}(\sigma(uw_i v w_i^{-1})) - \text{tr}(\sigma(uw_i v^{-1} w_i^{-1}))) \\ &= \sum_{p_i \in u \cap v} s_i \cdot (\text{tr}(\sigma(uw_i v w_i^{-1})) - (\text{tr}(\sigma(u))\text{tr}(\sigma(w_i v w_i^{-1})) - \text{tr}(\sigma(uw_i v w_i^{-1})))) \\ &= \sum_{p_i \in u \cap v} s_i \cdot (2\text{tr}(\sigma(uw_i v w_i^{-1})) - \text{tr}(\sigma(u))\text{tr}(\sigma(v))) \\ &= 2\text{tr}(\sigma([u,v])) - \sum_{p_i \in u \cap v} s_i \cdot \text{tr}(\sigma(u))\text{tr}(\sigma(v)). \quad \square \end{aligned}$$

**Théorème 6.19.** *L'application  $\psi^*$  satisfait*

$$\psi^* \{\text{tr}_u, \text{tr}_v\}_{\text{GL}} = \{\psi^* \text{tr}_u, \psi^* \text{tr}_v\}_{\otimes},$$

pour tout  $u, v \in \Gamma$ .

*Démonstration.* Soient  $(\eta, \sigma) \in \chi(\Gamma, \mathbb{C}^*) \times \chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$ . Alors,

$$\begin{aligned}
& \{\psi^* \mathrm{tr}_u, \psi^* \mathrm{tr}_v\}_{\otimes}(\eta, \sigma) \\
&= \{\mathrm{tr}_u \otimes \mathrm{tr}_u, \mathrm{tr}_v \otimes \mathrm{tr}_v\}_{\otimes}(\eta, \sigma) \\
&= \frac{1}{2}(\{\mathrm{tr}_u, \mathrm{tr}_v\}_{\mathbb{C}^*} \otimes \mathrm{tr}_u \mathrm{tr}_v + \mathrm{tr}_u \mathrm{tr}_v \otimes \{\mathrm{tr}_u, \mathrm{tr}_v\}_{\mathrm{SL}})(\eta, \sigma) \\
&= \frac{1}{2}(\mathrm{tr}_{[u,v]} \otimes \mathrm{tr}_u \mathrm{tr}_v + \mathrm{tr}_u \mathrm{tr}_v \otimes \mathrm{tr}_{[\bar{u}, \bar{v}]}) (\eta, \sigma) \\
&= \frac{1}{2}(\mathrm{tr}_{[u,v]} \otimes \mathrm{tr}_u \mathrm{tr}_v + \mathrm{tr}_u \mathrm{tr}_v \otimes \mathrm{tr}_{[u,v]+[u,v-1]})(\eta, \sigma), \text{ par le théorème 3.8,}
\end{aligned}$$

en notant à la dernière étape que  $\mathrm{tr}_\gamma = \mathrm{tr}_{\gamma^{-1}}$  pour une fonction de trace de  $\mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))]$ . On a alors, par le lemme 6.18, que

$$\begin{aligned}
& \{\psi^* \mathrm{tr}_u, \psi^* \mathrm{tr}_v\}_{\otimes}(\eta, \sigma) \\
&= \frac{1}{2}(\mathrm{tr}_{[u,v]} \otimes \mathrm{tr}_u \mathrm{tr}_v + \mathrm{tr}_u \mathrm{tr}_v \otimes (2\mathrm{tr}_{[u,v]} - \sum_{p_i \in u \cap v} s_i \cdot \mathrm{tr}_u \mathrm{tr}_v))(\eta, \sigma).
\end{aligned}$$

En passant dans  $\mathbb{C}[(\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*) \times \chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))) / \chi(\Gamma, \{-1, 1\})]$ , on obtient

$$\begin{aligned}
& \{\psi^* \mathrm{tr}_u, \psi^* \mathrm{tr}_v\}_{\otimes}(\eta, \sigma) \\
&= \frac{1}{2}(\eta([u,v]) \mathrm{tr}_u(\sigma) \mathrm{tr}_v(\sigma) + \eta(uv)(2\mathrm{tr}_{[u,v]}(\sigma) - \sum_{p_i \in u \cap v} s_i \cdot \mathrm{tr}_u(\sigma) \mathrm{tr}_v(\sigma))) \\
&= \frac{1}{2}(\mathrm{tr}_u(\sigma) \mathrm{tr}_v(\sigma) \sum_{p_i \in u \cap v} s_i \cdot \eta(uv) + \eta(uv)(2\mathrm{tr}_{[u,v]}(\sigma) - \sum_{p_i \in u \cap v} s_i \cdot \mathrm{tr}_u(\sigma) \mathrm{tr}_v(\sigma))),
\end{aligned}$$

par le lemme 6.13

$$= \eta(uv) \mathrm{tr}_{[u,v]}(\sigma).$$

Ainsi, par la proposition 6.9, on a

$$\begin{aligned}
\{\psi^* \mathrm{tr}_u, \psi^* \mathrm{tr}_v\}_{\otimes}(\eta, \sigma) &= \eta(uw_i v w_i^{-1}) \left( \sum_{p_i \in u \cap v} s_i \cdot \mathrm{tr}(\sigma(uw_i v w_i^{-1})) \right) \\
&= \sum_{p_i \in u \cap v} s_i \cdot (\eta(uw_i v w_i^{-1}) \mathrm{tr}(\sigma(uw_i v w_i^{-1}))) \\
&= \sum_{p_i \in u \cap v} s_i \cdot \mathrm{tr}(\eta \sigma(uw_i v w_i^{-1})) \\
&= \mathrm{tr}(\eta \sigma([u,v])) \\
&= \psi^* \mathrm{tr}_{[u,v]}(\eta, \sigma)
\end{aligned}$$

□

Nous déduisons de ce théorème le corollaire qui suit :

**Corollaire 6.20.** *La sous-algèbre des invariants*

$$(\mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*)] \otimes \mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))])^{\chi(\Gamma, \{-1, 1\})}$$

*est une sous-algèbre de Poisson de  $\mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*)] \otimes \mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))]$ .*

*Démonstration.* Grâce à l'isomorphisme du théorème 5.2 et au fait que les traces engendrent les algèbres de fonctions des variétés de caractères (théorème 4.10), on déduit que les fonctions de trace engendrent

$$(\mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathbb{C}^*)] \otimes \mathbb{C}[\chi(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))])^{\chi(\Gamma, \{-1, 1\})}.$$

De plus, la formule du théorème 6.19 démontre que le crochet de deux fonctions de trace s'écrit comme une combinaison linéaire de fonctions de trace, et est donc encore dans la sous-algèbre des invariants.  $\square$

Finalement, on déduit que le crochet  $\{\cdot, \cdot\}_{\mathrm{GL}}$  est un crochet de Poisson de la manière suivante : il est envoyé au crochet  $\{\cdot, \cdot\}_{\otimes}$  par l'isomorphisme  $\psi^*$ , et ce dernier satisfait la règle de Leibniz. Ceci force  $\{\cdot, \cdot\}_{\mathrm{GL}}$  à satisfaire la règle de Leibniz, qui était le seul axiome à vérifier.

Nous pouvons ainsi interpréter le théorème 6.19 comme disant que l'application  $\psi^*$  est un isomorphisme d'algèbres de Poisson.

## Références

- [Bum98] Daniel BUMP : *Algebraic geometry*. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1998.
- [Cha04] Moira CHAS : Combinatorial lie bialgebras of curves on surfaces. *Topology*, 43(3):543–568, 2004.
- [Cha15] Moira CHAS : The Goldman bracket and the intersection of curves on surfaces. In *Geometry, groups and dynamics*, volume 639 de *Contemp. Math.*, pages 73–83. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.
- [CK10] Moira CHAS et Fabiana KRONGOLD : An algebraic characterization of simple closed curves on surfaces with boundary. *J. Topol. Anal.*, 2(3):395–417, 2010.
- [DCP17] Corrado DE CONCINI et Claudio PROCESI : *The invariant theory of matrices*, volume 69 de *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2017.
- [Dol03] Igor DOLGACHEV : *Lectures on invariant theory*, volume 296 de *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [FL12] Carlos FLORENTINO et Sean LAWTON : Singularities of free group character varieties. *Pacific J. Math.*, 260(1):149–179, 2012.
- [Gol86] William M. GOLDMAN : Invariant functions on Lie groups and Hamiltonian flows of surface group representations. *Invent. Math.*, 85(2):263–302, 1986.

- [Gol09] William M. GOLDMAN : Trace coordinates on Fricke spaces of some simple hyperbolic surfaces. *In Handbook of Teichmüller theory. Vol. II*, volume 13 de *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, pages 611–684. Eur. Math. Soc., Zürich, 2009.
- [Sha13] Igor R. SHAFAREVICH : *Basic algebraic geometry. 1*. Springer, Heidelberg, third édition, 2013. Varieties in projective space.
- [Tur91] Vladimir G. TURAEV : Skein quantization of Poisson algebras of loops on surfaces. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 24(6):635–704, 1991.

BENJAMIN OUIMETTE  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE  
*Courriel:* benjamin.ouimette@usherbrooke.ca

CASSANDRA GUILLEMETTE  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE  
*Courriel:* cassandra.guillemette@usherbrooke.ca

