

Introduction à la topologie différentielle par le biais de la théorie de Morse classique

Geneviève Soroka-Perras

Reçu le 2023-07-28 et accepté le 2024-02-26

RÉSUMÉ L’objectif de cet article est de présenter la théorie de Morse classique ainsi que les notions de topologie différentielle nécessaires à sa compréhension. Des exemples seront notamment présentés de même que des références vers des sujets connexes.

1 Introduction

La topologie est une branche des mathématiques étudiant, entre autres, les propriétés invariantes, par exemple la dimension, d’objets géométriques abstraits (espaces topologiques) sous un homéomorphisme (déformation continue et bijective). La topologie différentielle est un cas particulier où les espaces topologiques sont des variétés lisses, par exemple les sphères munies d’une correspondance avec un espace euclidien, soumises à un difféomorphisme (homéomorphisme différentiable). La topologie différentielle est reliée de près à la géométrie différentielle, laquelle étudie les propriétés géométriques des variétés lisses, par exemple les distances. Ces théories se complètent pour former une théorie géométrique des variétés lisses, incluant notamment l’étude des comportements des flots sur les variétés lisses, nommée théorie des systèmes dynamiques lisses et détaillée dans [BDM17].

La théorie sous-jacente de topologie différentielle présentée dans cet article, la théorie de Morse classique, se développe durant la première moitié du vingtième siècle, principalement par le mathématicien Harold Calvin Marston Morse [Bot80]). Elle étudie la topologie d’une variété lisse en analysant une fonction lisse (dite de Morse) définie sur celle-ci. Une des principales applications de la théorie de Morse est la décomposition en anses d’une variété. D’autres applications, par exemple en robotique, sont détaillées au chapitre 3 de [N⁺11]. De plus, vers la fin du vingtième siècle, le mathématicien Robin Forman développe un analogue combinatoire de la théorie de Morse classique, nommée la théorie de Morse discrète. Celle-ci étudie la topologie de complexes simpliciaux, des objets

J’aimerais remercier le groupe de recherches SAG pour m’avoir permis de suivre un stage de recherches, et particulièrement Tomasz Kaczynski pour m’avoir supervisée, encadrée et financée.

constitués de sommets, d'arêtes et de triangles, plutôt que de variétés lisses ¹. La modélisation de surfaces est un exemple d'applications de la théorie de Morse discrète, tel que mentionné dans [LLT04].

Le présent article vise à introduire la topologie différentielle par le biais de la théorie de Morse classique, en quatre étapes. D'abord, à la section 2, nous présentons quelques notions topologiques préliminaires ([NI14]), puis à la section 3, nous définissons une variété lisse ainsi qu'une fonction lisse définie sur celle-ci ([Lee13]). Ensuite nous présentons les grandes lignes de la théorie de Morse à la section 4, avant de terminer, à la section 5, en présentant la décomposition en anses d'une variété lisse ([Mat02]).

2 Rappels sur les espaces topologiques

Tout d'abord, rappelons quelques définitions élémentaires de topologie afin de comprendre ce que signifie « l'étude des propriétés invariantes d'espaces topologiques sous un homéomorphisme ». Les définitions sont tirées de [NI14].

Définition 2.1. (X, τ) est un espace topologique si X , un ensemble, et τ , une collection de sous-ensembles de X appelés ouverts, satisfont :

1. $\emptyset, X \in \tau$
2. $U_i \in \tau \forall i \implies \bigcup_i U_i \in \tau$
3. $U_1, U_2 \in \tau \implies U_1 \cap U_2 \in \tau$

Définition 2.2. Soit un espace topologique (X, τ) et un élément $x \in X$. Toute partie de X contenant un ouvert contenant x est un voisinage de x . L'ensemble des voisinages de $x \in X$ est noté $\nu(x)$.

Définition 2.3. Une base pour la topologie de (X, τ) , notée \mathbb{B} , est une famille d'ouverts, où tout ouvert de X s'écrit comme réunion d'intersections finies d'éléments de \mathbb{B} .

Définition 2.4. Une fonction $f : X \rightarrow X'$ est continue sur X si pour tout $a \in X$, nous avons que $V' \in \nu(f(a))$ implique que $f^{-1}(V') \in \nu(a)$.

Remarque 2.5. Si $f : X \rightarrow X'$ est continue et $F \subset X'$ est fermé, alors $X \setminus f^{-1}(F) = f^{-1}(X' \setminus F)$ est ouvert, donc $f^{-1}(F)$ est fermé.

Définition 2.6. Un homéomorphisme est une bijection $f : X \rightarrow X'$ telle que f et f^{-1} soient continues. S'il existe une telle application entre (X, τ) et (X', τ') , ces espaces sont homéomorphes.

Définition 2.7. Un invariant topologique est une propriété d'un espace topologique qui ne change pas sous l'application d'un homéomorphisme.

¹Voir l'article CaMUS, volume 7, de D. Desjardins Côté sur le sujet.

Définissons à présent deux des principales propriétés topologiques, soit le fait d'être séparé ainsi que la compacité.

Plusieurs axiomes de séparation existent, mais le plus fréquemment mentionné est la séparation τ_2 (dite de Hausdorff).

Définition 2.8. Un espace topologique (X, τ) est de Hausdorff si $\forall x, y \in X$ distincts, $\exists V \in \nu(x)$ et $\exists W \in \nu(y)$ tels que $V \cap W = \emptyset$.

Enfin, la compacité, rencontrée en analyse réelle sous le théorème de Heine-Borel-Lebesgue, est définie plus généralement comme suit :

Définition 2.9. Un espace topologique est compact s'il est de Hausdorff et si, de toute famille d'ouverts dont l'union est égale à X (recouvrement ouvert), on peut en extraire un sous-recouvrement fini.

Théorème 2.10. Soit X et Y espaces topologiques de Hausdorff. Si X est compact et s'il existe une fonction continue $f : X \rightarrow Y$, alors $f(X)$ est aussi compact dans Y .

Consolidons cette section en présentant un espace topologique particulier, le quotient. Les définitions qui suivent proviennent de l'appendice A de [Lee13].

Définition 2.11. Soit X , un espace topologique, Y , un ensemble et $\pi : X \rightarrow Y$, une application surjective et continue. La topologie du quotient sur Y déterminée par π est définie en déclarant $U \subset Y$ comme étant ouvert si et seulement si $\pi^{-1}(U) \subset X$ est ouvert. Dans ce cas, $\pi : X \rightarrow Y$ est dite application quotient.

Définition 2.12. Un sous-ensemble $U \subset X$ est dit saturé selon $\pi : X \rightarrow Y$ si $U = \pi^{-1}(\pi(U))$, c'est-à-dire s'il est la préimage entière de son image par π .

Théorème 2.13. Soit $\pi : X \rightarrow Y$ une application quotient et B un espace topologique. Alors :

1. $F : Y \rightarrow B$ est continue $\iff F \circ \pi : X \rightarrow B$ est continue.
2. La topologie du quotient est la seule topologie dans laquelle le point précédent est vrai.
3. $K \subset Y$ est fermé $\iff \pi^{-1}(K) \subset X$ est fermé.
4. Si π est injective, alors il s'agit d'un homéomorphisme.
5. Si $U \subset X$ est soit ouvert ou fermé et saturé, alors la restriction $\pi|_U : U \rightarrow \pi(U)$ est une application quotient.
6. Toute composition de π avec une application quotient est une application quotient.

3 Variété lisse

Les définitions de la section précédente nous permettent désormais de définir l'objet mathématique sur lequel se base notre étude, la variété lisse. La théorie de cette section s'inspire des deux premiers chapitres de [Lee13]. Nous procédons en deux temps : l'objet topologique, puis sa structure lisse.

3.1 Variété topologique

Définition 3.1. M est une variété de dimension m (ou m -variété) si :

1. M est un espace topologique
2. M est de Hausdorff
3. Il existe une base dénombrable pour la topologie de M
4. Tout point $p \in M$ a un voisinage homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^m

Remarque 3.2. Le point 4 donne l'existence, pour tout $p \in M$, d'un homéomorphisme $\phi : U \rightarrow U'$, où $U \subset M$ et $U' \subset \mathbb{R}^m$ sont des ouverts et $p \in U$.

Une m -variété topologique avec bords se définit similairement comme suit :

Définition 3.3. Une m -variété topologique avec bords est une m -variété topologique où tout point $p \in M$ a un voisinage homéomorphe ou bien à un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^m , ou bien à un sous-ensemble ouvert de \mathbb{H}^m , où \mathbb{H}^m est le demi-espace supérieur fermé défini par :

$$\mathbb{H}^m = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_m \geq 0\}.$$

À partir de la remarque 3.2, nous pouvons définir une *carte locale* (coordinate chart, [Lee13]) pour une m -variété M .

Définition 3.4. Une carte locale sur M est une paire (U, ϕ) , où U est un ouvert de M et $\phi : U \rightarrow U'$ est un homéomorphisme entre U et $U' = \phi(U) \subset \mathbb{R}^m$ (voir figure 3.1). L'ensemble U est un *domaine local* (coordinate domain, [Lee13]) et l'application ϕ est une application de coordonnées (coordinate map, [Lee13]).

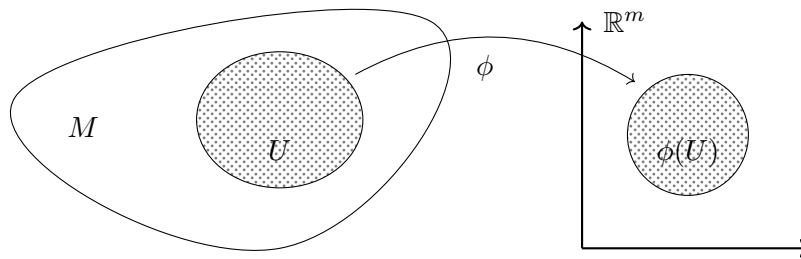


FIGURE 1 : Carte locale

Les coordonnées locales de p sur U sont $\phi(p) = (x_1(p), \dots, x_m(p))$. Si $\phi(p) = 0$, la carte locale est centrée en p . Sinon, il est possible d'obtenir une nouvelle carte locale centrée en p en y soustrayant le vecteur constant $\phi(p)$.

3.2 Structure lisse

La théorie de Morse porte sur l'analyse d'une fonction lisse sur une variété lisse. Afin de rendre possible le calcul différentiel sur une variété, celle-ci doit être munie d'une structure additionnelle. Le but de cette sous-section est de définir cette structure. Pour ce faire, plusieurs définitions seront présentées pour une m -variété M et une application de coordonnées $\phi : U \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^m$.

Définition 3.5. Soit des ouverts $U \subset \mathbb{R}^m$ et $V \subset \mathbb{R}^n$. Une application $F : U \rightarrow V$ est lisse si chacune de ses fonctions composantes a des dérivées partielles continues peu importe l'ordre. Si de plus F est bijective et F^{-1} est lisse, alors F est un difféomorphisme (cas particulier d'homéomorphisme).

Définition 3.6. Une fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ est lisse en un point $p \in M$ s'il existe une carte locale (U, ϕ) autour de $p \in M$ telle que $f \circ \phi^{-1}$ soit lisse. La fonction f est lisse sur M si elle est lisse en tout point $\forall p \in M$.

Définition 3.7. Si (U, ϕ) et (V, ψ) sont deux cartes locales pour une m -variété M telles que $U \cap V \neq \emptyset$, la composition $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ est dite *application de transition* de ϕ à ψ (*transition map*, [Lee13]).

Remarque 3.8. Une application de transition est un homéomorphisme, puisqu'il s'agit d'une composition d'homéomorphismes (remarque 3.2).

Définition 3.9. Deux cartes locales (U, ϕ) et (V, ψ) sont dites *compatibles* (smoothly compatible, [Lee13]) si ou bien $U \cap V = \emptyset$, ou bien l'application de transition $\psi \circ \phi^{-1}$ est un difféomorphisme.

Définition 3.10. Un atlas lisse sur M , noté \mathcal{A} , est une collection de cartes locales (U_i, ϕ_i) dont les domaines U_i recouvrent M et dans laquelle n'importe quelles deux cartes locales sont compatibles, puis il est maximal s'il ne peut être contenu dans un plus grand atlas.

Définition 3.11. Une variété lisse est une paire (M, \mathcal{A}) , où M est une variété topologique et \mathcal{A} est un atlas maximal lisse sur M .

Voyons quelques exemples.

Exemple 3.12. Les espaces euclidiens \mathbb{R}^m sont les variétés lisses les plus simples. Elles admettent $(\mathbb{R}^m, Id_{\mathbb{R}^m})$ comme seule carte locale.

Exemple 3.13. Le graphe d'une fonction lisse $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ défini par $\Gamma(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \mid x \in U, y = f(x)\}$ avec la topologie du sous-espace de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$. Soit $\pi_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$, la projection (continue) sur le premier terme, et soit $\phi : \Gamma(f) \rightarrow U$ telle que $\phi(x, y) = x$, la restriction de π_1 à $\Gamma(f)$. ϕ est une application continue, car il s'agit de la restriction d'une application continue π_1 . De plus, ϕ est un homéomorphisme, puisque son inverse s'écrit explicitement par $\phi^{-1}(x) = (x, f(x))$. Ainsi, $\Gamma(f)$ est une variété topologique de dimension n ainsi qu'une variété lisse avec comme seule carte locale $(\Gamma(f), \phi)$.

Ensuite, les m -sphères sont d'autres exemples communs de variétés.

Exemple 3.14. Toute n -sphère unitaire \mathbb{S}^n peut être munie de la topologie du sous-espace de \mathbb{R}^{n+1} . Pour qu'elle soit une variété topologique il ne reste qu'à définir un ensemble de cartes locales. La structure standard consiste d'abord à prendre $2(n+1)$ cartes locales dont les voisinages sont chaque côté de chaque axe, c'est-à-dire $U_i^+ = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | x_i > 0\}$ et $U_i^- = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | x_i < 0\}$. Ensuite, soit $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(u) = \sqrt{1 - |u|^2}$ de sorte que chaque $U_i^+ \cap \mathbb{S}^n$ soit le graphe de $x_i = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})$ et similairement, chaque $U_i^- \cap \mathbb{S}^n$ soit celui de $x_i = -f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})$. Ainsi, chaque sous-ensemble $U_i^\pm \cap \mathbb{S}^n$ est localement euclidien de dimension n grâce aux homéomorphismes (de graphe, comme dans l'exemple 3.13) $\phi_i^\pm : U_i^\pm \cap \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$ donnés par $\phi_i^\pm(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})$. En d'autres mots, chaque point $p \in \mathbb{S}^n$ est dans le domaine d'au moins une carte locale, faisant de \mathbb{S}^n une variété topologique.

Sa structure lisse nécessite toutefois des détails additionnels. Soit (U_i^\pm, ϕ_i^\pm) les cartes locales (de graphes) définies plus haut. Pour n'importe quels indices distincts $i < j$, l'application de transition se calcule explicitement :

$\phi_i^\pm \circ (\phi_j^\pm)^{-1}(u_1, \dots, u_n) = (u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, \pm \sqrt{1 - |u|^2_j}, \dots, u_n)$. L'indice j signifie que le terme $\pm \sqrt{1 - |u|^2}$ est à la j^e position. Lorsque $i = j$, $\phi_i^\pm \circ (\phi_i^\pm)^{-1} = Id_{\mathbb{B}^n}$. Ainsi, la collection $\{(U_i^\pm, \phi_i^\pm)\}$ de cartes locales est un atlas lisse et donc définit une structure lisse pour \mathbb{S}^n , faisant de celle-ci une variété lisse de dimension n .

Voici d'ailleurs plus explicitement un exemple de structure lisse pour la 2-sphère.

Exemple 3.15. Considérons la 2-sphère $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, une 2-variété dont la structure lisse standard se définit par six cartes locales dont les voisinages sont :

- $U_x^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x > 0\}$
- $U_x^- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x < 0\}$
- $U_y^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y > 0\}$
- $U_y^- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y < 0\}$
- $U_z^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z > 0\}$
- $U_z^- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z < 0\}$

En particulier, considérons les cartes locales (U_z^\pm, ϕ_z^\pm) , où $\phi_z^+(x, y, z) = (x, y)$ et $\phi_z^-(x, y, z) = (x, y)$. Alors $\phi_z^{+^{-1}}(x, y) = (x, y, f(x, y))$ et $\phi_z^{-^{-1}}(x, y) = (x, y, -f(x, y))$, avec $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Cet exemple sera détaillé davantage tout au long de l'article, jusqu'à la dernière section lorsque nous discuterons de sa décomposition en anses.

À cet effet, présentons similairement la structure lisse des espaces projectifs réels $\mathbb{R}P^m$.

Exemple 3.16. $\mathbb{R}P^m$ est l'ensemble de toutes les droites passant par l'origine dans \mathbb{R}^{m+1} avec la topologie du quotient déterminée par la projection naturelle

$\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{RP}^m$ qui envoie chaque $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ au sous-espace engendré par x , noté $[x] = \pi(x) \in \mathbb{RP}^m$.

Soit $\tilde{U}_i \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, l'ensemble où $x_i \neq 0$, soit $U_i = \pi(\tilde{U}_i) \subset \mathbb{RP}^m$, un ouvert par le théorème 2.13 (car \tilde{U}_i est un ouvert saturé), soit $\pi|_{\tilde{U}_i} : \tilde{U}_i \rightarrow U_i$, une application quotient et soit $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ donnée par $\phi_i([x_1, \dots, x_{n+1}]) = (\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i})$. L'application ϕ_i est bien définie, car sa valeur reste inchangée lorsque x est multiplié par un scalaire non nul, puis par le théorème 2.13, ϕ_i est continue, puisque $\phi_i \circ \pi$ l'est.

De plus, ϕ_i est un homéomorphisme, puisque son inverse est continu et s'exprime explicitement par $\phi_i^{-1}(u_1, \dots, u_n) = [u_1, \dots, u_{i-1}, 1, u_i, \dots, u_n]$. Puisque les ouverts U_i pour $i = 1, \dots, n+1$ recouvrent \mathbb{RP}^m , celui-ci est localement euclidien. Sans détailler davantage, \mathbb{RP}^m est également de Hausdorff et satisfait le second axiome de dénombrabilité, donc est une variété topologique. Enfin, \mathbb{RP}^m est également une variété lisse, puisque la collection des cartes locales $\{(U_i, \phi_i)\}$ forme un atlas lisse. En effet, si $i > j$, l'application de transition est $\phi_j \circ \phi_i^{-1}(u_1, \dots, u_n) = (\frac{u_1}{u_j}, \dots, \frac{u_{j-1}}{u_j}, \frac{u_{j+1}}{u_j}, \dots, \frac{u_{i-1}}{u_j}, \frac{1}{u_j}, \frac{u_i}{u_j}, \dots, \frac{u_n}{u_j})$, soit un difféomorphisme de $\phi_i(U_i \cap U_j)$ à $\phi_j(U_i \cap U_j)$.

Plusieurs autres exemples de variétés et de structures lisses sont présentés à la fin du chapitre 1 de [Lee13].

Enfin, plus généralement, il existe une structure lisse pour les variétés de dimensions deux et trois, dont les détails se trouvent respectivement sous le théorème A de [Hat22], puis dans [Hat04]. Il est par conséquent difficile de visualiser une variété sur laquelle il n'existe pas de structure lisse, soit le sujet discuté dans [Ker60].

4 Théorie de Morse classique

Cette section introduit le sujet d'intérêt pour une m -variété lisse compacte M en trois étapes. D'abord nous décrivons la fonction lisse (de Morse) que nous voulons analyser en lui donnant une forme standard. Ensuite, nous montrons son existence, et enfin nous décrivons un champ vectoriel lui correspondant. Les deux dernières sections de cet article sont fortement inspirées de [Mat02], puis certaines explications du chapitre 4 sont inspirées de [Knu15].

4.1 Fonction de Morse

Rappelons d'abord ce qu'est un point critique et ce que signifie qu'il soit dégénéré, puis définissons une fonction de Morse.

Définition 4.1. Un point $p \in M$ est critique si $\frac{\partial f(p)}{\partial x_i} = 0 \forall i$, où (x_1, \dots, x_n) est le système de coordonnées locales autour de p . Si de plus $\det(H_f(p)) \neq 0$, alors p_0 est non dégénéré, où $H_f(p)$ est la matrice hessienne de f en p :

$$H_f(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}(p) \end{pmatrix}$$

Définition 4.2. Une fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ est de Morse si tous ses points critiques sont non dégénérés.

La fonction hauteur est fréquemment utilisée comme fonction de Morse. Voici un exemple de telle fonction ainsi que ses points critiques sur la sphère S^2 abordée à l'exemple 3.15.

Exemple 4.3. Soit la fonction hauteur $h : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x, y, z) = z$. Sa représentation en coordonnées sur la partie supérieure de S^2 (c-à-d le voisinage U_z^+) est $h \circ \phi_z^{+^{-1}}(x, y) = h(x, y, f(x, y)) = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Ses points critiques se trouvent lorsque le gradient de $h \circ \phi_z^{+^{-1}}$ s'annule, c'est-à-dire lorsque $\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}(-x, -y) = (0, 0)$, ce qui n'est vrai qu'en $(x, y) = (0, 0)$. Ainsi, sur S^2 , $\phi_z^{+^{-1}}(0, 0) = (0, 0, 1) = p_1$ est un point critique correspondant à la valeur critique $h(p_1) = c_1 = 1$. De plus, $H_f = (1 - x^2 - y^2)^{-3/2} \begin{pmatrix} y^2 - 1 & -xy \\ -xy & x^2 - 1 \end{pmatrix} \implies \det(H_f) = (1 - x^2 - y^2)^{-2} \neq 0$ en p_1 . Ainsi, p_1 est non dégénéré. De façon similaire, sur la partie inférieure de S^2 (c-à-d le voisinage U_z^-), nous trouvons que $p_0 = (0, 0, -1)$ est un point critique non dégénéré de h avec valeur critique $c_0 = h(p_0) = -1$. Nous pouvons enfin vérifier que h n'a pas d'autre point critique sur S^2 (en investiguant sa représentation sur U_x^\pm et U_y^\pm), faisant de h une fonction de Morse.

Poursuivons comme dans les exemples 3.15 et 4.3 avec la représentation de h autour de p_1 et p_0 comme étant $f(x, y)$ et $-f(x, y)$ respectivement.

Tel que motivé au premier chapitre de [Knu15], nous voyons que la représentation en coordonnées de h autour de chaque point critique motive l'existence d'une forme standard.

Exemple 4.4. Avec le développement en série de Taylor sur \mathbb{R}^2 , la représentation de h autour de p_1 est

$$\begin{aligned} f(x, y) &\approx f(0, 1) + \nabla f(0, 0)(x, y)^t + 1/2(x, y) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} (x, y)^t + \dots \\ &= 1 - 1/2(x^2 + y^2) + p(x, y) \end{aligned}$$

Comme le polynôme $p(x, y)$ est d'ordre ≥ 3 en x et y , pour des polynômes $\lambda_1(x, y)$ et $\lambda_2(x, y)$, nous pouvons récrire $f(x, y) = 1 - x^2\lambda_1(x, y) - y^2\lambda_2(x, y)$ autour de p_1 . Ainsi, en posant $u = x\sqrt{\lambda_1(x, y)}$ et $y = y\sqrt{\lambda_2(x, y)}$, la représentation de h pour une certaine carte locale autour de p_1 est $\tilde{f}(u, v) = h(p_1) - u^2 - v^2$. Similairement, autour de p_0 , $\tilde{f}(u, v) = h(p_0) + u^2 + v^2$.

Théorème 4.5. (Lemme de Morse)

Si $p_0 = (0, \dots, 0)$ est un point critique non dégénéré d'une fonction de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, alors il existe un système de coordonnées locales (X_1, \dots, X_m) autour de p_0 tel que la représentation de f dans ce système de coordonnées ait la forme standard suivante

$$f = -X_1^2 - X_2^2 - \dots - X_\lambda^2 + X_{\lambda+1}^2 + \dots + X_m^2 + f(p_0) \quad (1)$$

où λ est le nombre d'éléments négatifs sur la diagonale de $H_f(p_0)$ après diagonalisation, dit l'indice de p_0 .

Remarque 4.6. Avec la notation de la section précédente, un énoncé alternatif du lemme de Morse est le suivant. En tout point critique p d'une fonction de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, il existe une carte locale (U, ϕ) telle que la représentation de f dans U soit $f \circ \phi^{-1}(x_1, \dots, x_m) = f(p) - \sum_{i=1}^{\lambda} x_i^2 + \sum_{i=\lambda+1}^m x_i^2$.

Avant de présenter la preuve du théorème 4.5, nous avons besoin du lemme suivant, dont la preuve est une application du théorème fondamental de calcul et de la règle de dérivation en chaîne, présentée sous le lemme 2.1 dans [Mil63].

Lemme 4.7. Si une fonction $f(x_1, \dots, x_m)$ est définie autour de $(0, \dots, 0)$ avec $f(0, \dots, 0) = (0, \dots, 0)$, alors il existe m fonctions g_1, \dots, g_m telles que :

1. $f(x_1, \dots, x_m) = x_1 g_1(x_1, \dots, x_m) + \dots + x_m g_m(x_1, \dots, x_m)$
2. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(0, \dots, 0) = g_i(0, \dots, 0) \forall i = 1, \dots, m$

Montrons à présent le théorème 4.5.

Démonstration. Soit (x_1, \dots, x_m) , le système de coordonnées locales au point critique $p_0 = (0, \dots, 0)$. Nous pouvons supposer que $f(p_0) = 0$ en remplaçant f par $f - f(p_0)$.

Par le lemme 4.7, autour d'un voisinage de p_0 , nous avons m fonctions lisses $g_1(x_1, \dots, x_m), \dots, g_m(x_1, \dots, x_m)$ telles que :

$$f(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^m x_i g_i(x_1, \dots, x_m) \quad (2)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0) = g_i(p_0) \quad (3)$$

Les deux côtés de l'équation 3 sont nuls étant donné la criticalité de p_0 . En appliquant le lemme 4.7 à $g_i(x_1, \dots, x_m)$, nous obtenons m autres fonctions lisses $h_{i1}(x_1, \dots, x_m), \dots, h_{im}(x_1, \dots, x_m)$ telles que :

$$g_i(x_1, \dots, x_m) = \sum_{j=1}^m x_j h_{ij}(x_1, \dots, x_m) \quad (4)$$

dans un voisinage de p_0 .

En insérant cette équation dans l'équation 2, nous obtenons :

$$f(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i,j=1}^m x_i x_j h_{ij}(x_1, \dots, x_m) \quad (5)$$

Enfin, en posant $H_{ij} = (h_{ij} + h_{ji})/2$, nous obtenons :

$$f(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i,j=1}^m x_i x_j H_{ij}(x_1, \dots, x_m) \quad (6)$$

et

$$H_{ij}(x_1, \dots, x_m) = H_{ji}(x_1, \dots, x_m) \quad (7)$$

L'idée de la preuve est de changer la représentation de f dans l'équation 6 pour une représentation de la forme standard de l'équation 1 en procédant par induction sur le nombre de termes.

Calculons désormais les dérivées partielles de second ordre de f (selon l'équation 6) évaluées à l'origine, comme suit :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p_0) = 2H_{ij}(p_0) \quad (8)$$

Puisque le point critique p_0 est non dégénéré ($\det H_{ij}(p_0) \neq 0$), nous pouvons en tout temps supposer, à l'aide d'un changement de coordonnées approprié, que :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p_0) \neq 0 \quad (9)$$

En effet, voyons ceci dans un cas où les coordonnées sont (x, y) , où $p_0 = (0, 0)$. Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0) \neq 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_0) = 0$, en interchangeant les axes, nous obtenons la validité de 9. Si cette fois $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_0) = 0$, la matrice hessienne de f en $p_0 = (0, 0)$ dans les coordonnées (x, y) , où $a \neq 0$, a l'allure suivante :

$$H_f(p_0) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

Soit (X, Y) , un nouveau système de coordonnées donné par $x = X - Y$ et $y = X + Y$ et soit \mathcal{H}_f la matrice hessienne de f dans ce système de coordonnées. Alors \mathcal{H}_f a la forme suivante :

$$\mathcal{H}_f(p_0) = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & -2a \end{pmatrix}$$

La validité de 9 s'ensuit et se généralise pour tout système de coordonnées.

Ainsi, par l'équation 8, $H_{11} \neq 0$ et comme H_{11} est continue, elle ne s'annule pas dans un voisinage de p_0 .

Soit (X_1, x_2, \dots, x_m) , un nouveau système de coordonnées locales, où :

$$X_1 = \sqrt{|H_{11}|} \left(x_1 + \sum_{i=2}^m x_i \frac{H_{1i}}{H_{11}} \right) \quad (10)$$

Nous pouvons montrer que le déterminant du Jacobien de la transformation de (X_1, x_2, \dots, x_m) à (x_1, x_2, \dots, x_m) évalué en p_0 est non nul, et donc nous pouvons effectivement prendre (X_1, x_2, \dots, x_m) comme système de coordonnées locales.

Finalement, en évaluant le carré de X_1 et en le comparant à l'équation 6, nous avons :

$$f = \begin{cases} X_1^2 + \sum_{i,j=2}^m x_i x_j H_{ij} - (\sum_{i=2}^m x_i H_{1i})^2 / H_{11}, & H_{11} > 0 \\ -X_1^2 + \sum_{i,j=2}^m x_i x_j H_{ij} - (\sum_{i=2}^m x_i H_{1i})^2 / H_{11}, & H_{11} < 0. \end{cases} \quad (11)$$

Ainsi, nous observons dans 11 que les termes à partir du second sont indépendants de X_1 , et donc en procédant similairement avec X_2 jusqu'à X_m , nous pouvons alors montrer que f peut être représentée comme dans l'équation 1, ce qui achève la preuve. \square

Concluons cette sous-section avec deux corollaires importants du lemme 4.5.

Corollaire 4.8. *Les points critiques d'une fonction de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ sont tous isolés les uns des autres.*

Démonstration. Avec la notation de la remarque 4.6 sous le lemme de Morse (lemme 4.5), nous voyons que la i -ième dérivée partielle de $f \circ \phi^{-1}$ est $\pm 2x_i$, et donc $0 \in \phi(U)$ est le seul point pour lequel les dérivées partielles de $f \circ \phi^{-1}$ s'annulent. Ainsi, le seul point critique de f dans U est $p = \phi^{-1}(0)$. \square

Corollaire 4.9. *Une fonction de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ sur une variété compacte M admet un nombre fini de points critiques.*

Démonstration. Par le corollaire 4.8, tous les points critiques de f sont isolés. Comme l'ensemble des points critiques de f est fermé dans M (tel qu'expliqué à la remarque 2.5), il existe un recouvrement ouvert de M , tel que chaque élément de ce recouvrement contienne au plus un point critique de f . Puisque M est compacte, par la définition 2.9, nous pouvons en extraire un sous-recouvrement fini, d'où le nombre de points critiques est fini. \square

4.2 Existence d'une fonction de Morse

Si une fonction de Morse existe, nous connaissons une forme standard pour celle-ci. Mais sommes-nous certains de son existence ? Oui, nous le sommes. Le but de cette sous-section est de montrer ceci en cherchant une fonction qui soit « proche » d'une fonction de Morse. Définissons d'abord ce que signifie que $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ soient « proches », ou alternativement, que f soit une (C^2, ϵ) -approximation de g .

Soit un ouvert $U \subset M$ sur lequel est défini un système de coordonnées (x_1, \dots, x_m) (U est un voisinage en coordonnées tel que défini à la section précédente). Soit $K \subset U$ un ensemble compact et $\epsilon > 0$. Alors f est une (C^2, ϵ) -approximation de g dans K si les inégalités suivantes sont satisfaites $\forall p \in K$:

$$\begin{cases} |f(p) - g(p)| < \epsilon, \\ \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) - \frac{\partial g}{\partial x_i}(p) \right| < \epsilon, & i = 1, \dots, m \\ \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) - \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right| < \epsilon, & i, j = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (12)$$

Puisque les variétés étudiées dans ce chapitre sont compactes, il existe un nombre fini de voisinages U_1, \dots, U_k dont l'union est égale à M . De plus, pour chaque $i = 1 \dots k$, choisissons un ensemble compact $K_i \subset U_i$ tel qu'on ait aussi $M = K_1 \cup \dots \cup K_k$.

Ceci mène à la définition d'une (C^2, ϵ) -approximation sur M , nécessaire à la présentation du théorème d'existence qui suit.

Définition 4.10. Une fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ est une (C^2, ϵ) -approximation d'une fonction $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ si f est une (C^2, ϵ) -approximation de g sur K_l pour chaque $l = 1, \dots, k$.

Théorème 4.11. (*Existence d'une fonction de Morse*)

Soit M une m -variété compacte et $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse définie sur M . Alors il existe une fonction de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ qui soit une (C^2, ϵ) -approximation de g .

Plusieurs résultats seront énoncés avant de présenter la preuve de ce théorème. Comme il existe plusieurs fonctions lisses définies sur M , le théorème 4.11 implique également qu'il existe plusieurs fonctions de Morse définies sur M .

Lemme 4.12. Soit $\mathbb{R}^m = \{(x_1, \dots, x_m)\}$, un espace euclidien de dimension m , U , un ouvert de \mathbb{R}^m et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction lisse définie sur U . Alors il existe des coefficients $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x_1, \dots, x_m) - (a_1 x_1 + \dots + a_m x_m) \quad (13)$$

soit une fonction de Morse sur U . De plus, les coefficients a_1, \dots, a_m peuvent être choisis aussi petits que souhaité.

La preuve de ce lemme requiert une clarification de la structure introduite sur une variété topologique. Soit U , un ouvert de \mathbb{R}^m et $h : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, une application lisse envoyant un point $p = (x_1, \dots, x_m) \in U$ à un point $(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ où chaque composante s'écrit par $y_i = h_i(x_1, \dots, x_m) \forall i = 1 \dots m$. Il s'agit de la représentation de $h : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ que nous pouvons exprimer par un vecteur

$$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Définition 4.13. Le Jacobien de h en un point $p \in U$ est défini par

$$J_h(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_m}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial h_m}{\partial x_m}(p) \end{pmatrix}$$

Définition 4.14. Un point $p \in U$ avec $\det(J_h(p)) = 0$ est critique pour l'application $h : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. L'image $h(p) \in \mathbb{R}^m$ d'un point critique p est une valeur critique de h .

Le théorème de Sard, dont la preuve dépasse l'objectif de cet article, est nécessaire pour justifier l'existence d'une valeur q non critique pour h . La preuve complète du théorème 4.15 ainsi que la théorie préliminaire à celle-ci sont présentées au chapitre 6 de [Lee13].

Théorème 4.15. (*Théorème de Sard*)

L'ensemble des valeurs critiques d'une application lisse $h : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ est de mesure nulle dans \mathbb{R}^m .

Procédons à la démonstration du lemme 4.12.

Démonstration. L'idée de la preuve est de sélectionner $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ assez petits de sorte que

$$F = f(x_1, \dots, x_m) - (a_1 x_1 + \dots + a_m x_m) \quad (15)$$

soit une fonction de Morse. Définissons une application $h : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ par

$$h = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m} \end{pmatrix} \quad (16)$$

Le Jacobien de h en p est

$$J_h(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}(p) \end{pmatrix} = H_f(p)$$

Ainsi, p est un point critique de $h : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ si et seulement si $\det(H_f(p)) = 0$.

Par le théorème de Sard, comme l'ensemble des valeurs critiques dans \mathbb{R}^m est de mesure nulle pour chaque voisinage de chaque point de \mathbb{R} , il existe une valeur non critique de h , soit $q \in \mathbb{R}^m$ tel que $q = (a_1, \dots, a_m)$ (près de l'origine).

Montrons désormais que F est une fonction de Morse. Si p est un point critique pour F , alors $\frac{\partial F}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) - a_i = 0 \forall i = 1 \dots m$, et alors $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = a_i$, c'est-à-dire

$$h(p) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \quad (17)$$

par la définition de h .

Or, le fait que $q = h(p)$ n'est pas une valeur critique de h équivaut à ce que p ne soit pas un point critique de h , et donc que $\det(H_f(p)) \neq 0$.

Puisque f et F ne diffèrent que par une fonction linéaire, $H_f(p) = H_F(p)$, il s'ensuit que p est un point critique non dégénéré de F . Le fait que ce point critique soit arbitraire implique que tous les points critiques de F sont non dégénérés, et donc que F est une fonction de Morse. \square

Avant de présenter la preuve du théorème 4.11, énonçons deux autres lemmes dont les preuves seront omises puisqu'elles dépassent également l'objectif de cet article. Elles sont présentées dans [Mat02] et [Lan95].

Lemme 4.16. *Soit $C \subset M$, un ensemble compact d'une m -variété. Si une fonction $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ n'a pas de point critique dégénéré dans C , alors pour un certain $\epsilon > 0$, toute (C^2, ϵ) -approximation f de g n'a pas de point critique dégénéré dans C .*

Lemme 4.17. *Soit U , un domaine d'une carte locale (ou simplement domaine local), et K , un sous-ensemble compact de U , alors il existe une fonction lisse $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur U satisfaisant les propriétés suivantes :*

1. $0 \leq h \leq 1$
2. h prend la valeur 1 sur un voisinage ouvert V contenant K
3. h prend la valeur 0 hors d'un ensemble compact $L \subset U$ contenant V

Nous procédons désormais à la démonstration du théorème 4.11.

Démonstration. L'objectif est de construire une (C^2, ϵ) -approximation f de g . Pour ce faire, choisissons deux recouvrements de M , l'un formé des domaines locaux U_l , et l'autre formé des ensembles compacts $K_l \subset U_l$, pour $l = 1, 2, \dots, k$. L'idée de la preuve est de construire des fonctions f_l par récurrence sur l , en commençant par f_0 , n'ayant pas de point critique dégénéré dans $\bigcup_{l=1} K_l$, $l = 1, \dots, k$. Lorsque $l = k$, nous aurons la fonction de Morse désirée.

Posons $f_0 = g$ et $C_l = K_1 \cup \dots \cup K_l$ avec $C_0 = \emptyset$. Notons que C_l est compact, puisque l'union d'un nombre fini de compacts est compacte.

Comme hypothèse de récurrence, supposons que $f_{l-1} : M \rightarrow \mathbb{R}$ n'a pas de point critique dégénéré dans C_{l-1} . Construisons f_l à partir de f_{l-1} .

Soit (x_1, \dots, x_m) , le système de coordonnées choisi pour U_l . Par le lemme 4.12, il existe des coefficients a_1, \dots, a_m assez petits tels que $F_{l-1} = f_{l-1}(x_1, \dots, x_m) - (a_1x_1 + \dots + a_mx_m)$ soit de Morse sur U_l . Modifions cette fonction pour l'exprimer à l'extérieur du domaine local U_l en appliquant le lemme 4.17 à U_l et K_l , afin d'obtenir $h_l : U_l \rightarrow \mathbb{R}$.

En définissant $L_l \subset U_l$ comme un compact en dehors duquel h_l prenne la valeur 0, construisons f_l à l'intérieur de U_l (« int U_l ») et à l'extérieur de L_l (« ext L_l ») respectivement comme suit :

$$f_l = \begin{cases} f_{l-1}(x_1, \dots, x_m) - (a_1x_1 + \dots + a_mx_m)h_l(x_1, \dots, x_m) & (\text{int } U_l) \\ f_{l-1}(x_1, \dots, x_m) & (\text{ext } L_l) \end{cases}$$

Remarquons que la fonction f_l correspond à la fonction F_{l-1} dans un voisinage du compact K_l où $h_l(x_1, \dots, x_m) = 1$. Ainsi, il suit que f_l n'a pas de point critique dégénéré sur cette région.

Ensuite, vérifions que f_l est une (C^2, ϵ) -approximation de f_{l-1} . Pour ce faire, calculons les valeurs absolues des dérivées de premier et second ordres de $f_{l-1}(p) - f_l(p) = (a_1x_1 + \dots + a_mx_m)h_l(p)$ sur U_l pour $p = (x_1, \dots, x_m)$ et $i, j = 1, \dots, m$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f_{l-1}}{\partial x_i}(p) - \frac{\partial f_l}{\partial x_i}(p) \right| &= \left| (a_i h_l(p) + (a_1x_1 + \dots + a_mx_m) \frac{\partial h_l}{\partial x_i}(p)) \right| \\ \left| \frac{\partial^2 f_{l-1}}{\partial x_i \partial x_j}(p) - \frac{\partial^2 f_l}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right| &= \\ \left| (a_i \frac{\partial h_l}{\partial x_j}(p) + a_j \frac{\partial h_l}{\partial x_i}(p) + (a_1x_1 + \dots + a_mx_m) \frac{\partial^2 h_l}{\partial x_i \partial x_j}(p)) \right|, & \\ i, j = 1, \dots, m, \text{ où } p = (x_1, \dots, x_m). & \end{aligned} \tag{18}$$

Comme $0 \leq h_l \leq 1$ et que $h_l = 0$ à l'extérieur de L_l , nous pouvons borner supérieurement les dérivées d'ordre un et deux par le théorème de valeur maximale. Ainsi, en choisissant a_1, \dots, a_m suffisamment petits, f_l peut être (C^2, ϵ) -proche de f_{l-1} dans K_l . Ensuite, pour approximer f_l dans les K_j pour $j \neq l$, utilisons le système de coordonnées (y_1, \dots, y_m) dans le domaine local U_j .

L'évaluation des dérivées de $|f_{l-1}(p) - f_l(p)|$ sur $U_j \cap U_l$ s'exprime comme la partie de droite des équations du haut grâce à une transformation appropriée entre (x_1, \dots, x_m) et (y_1, \dots, y_m) .

Encore par le théorème de la valeur maximale, la valeur absolue de chaque composante du Jacobien de cette transformation sur $K_j \cap L_l$ est bornée supérieurement, alors pour des valeurs de a_1, \dots, a_m assez faibles (en valeur absolue), la partie de droite des équations sur $K_j \cap L_l$ est aussi petite que souhaité. Ainsi, comme $f_l = f_{l-1}$ à l'extérieur de L_l , nous avons que f_l est (C^2, ϵ) -proche de f_{l-1} .

Puisque ce processus peut être répété pour $l = 1, \dots, k$, il suit de la définition d'une (C^2, ϵ) -approximation que f_l en est une de $f_{l-1} \forall \epsilon > 0$.

Enfin, par l'hypothèse de récurrence, f_{l-1} n'a pas de point critique dégénéré dans C_{l-1} , et par le lemme 4.16, comme f_l est (C^2, ϵ) -proche de f_{l-1} , elle n'en a pas non plus dans C_{l-1} . De plus, puisque nous avons montré que f_l n'a pas de point critique dégénéré dans K_l , il suit que f_l n'en a pas non plus dans $C_{l-1} \cup K_l = C_l$.

Ainsi, en procédant par récurrence pour $l = 1, \dots, k$, nous obtenons que f_k n'a pas de point critique dans $C_k = M$ et donc que f_k est de Morse sur M . De plus, f_k est (C^2, ϵ') -proche de g pour ϵ' pour n'importe quel ϵ' spécifié (pas nécessairement le même ϵ). Ceci conclut la preuve. \square

4.3 Champ vectoriel gradient

Nous nous intéressons désormais au champ vectoriel gradient sur une variété M correspondant à une fonction de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ dans le but d'investiguer les décompositions en anses de la variété M (sujet de la prochaine section).

Pour ce faire, rappelons d'abord très sommairement certains concepts de calcul différentiel dans \mathbb{R}^m . Une présentation plus rigoureuse de cette théorie se trouve aux chapitres 3 et 8 de [Lee13], mais ne sera pas présentée dans cet article afin de mettre l'accent sur la théorie de Morse.

Soit M une variété de dimension m plongée dans \mathbb{R}^n (la dimension de M , n'est généralement pas la même que celle de l'espace dans lequel elle est plongée), $p \in M$ et v , un vecteur par p tangent à M . L'ensemble de tels vecteurs est $T_p M$, l'espace vectoriel tangent à M en p , qui est de même dimension que M . Le vecteur vitesse d'une courbe sur M est un exemple typique de vecteur tangent. Soit $\phi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^m$, une courbe lisse dans \mathbb{R}^m et (X_1, \dots, X_m) , les coordonnées de \mathbb{R}^m . Alors c s'exprime par :

$$c(t) = (X_1(t), \dots, X_m(t)), a < t < b. \quad (19)$$

Supposons que $0 \in (a, b)$ et que $c(0) = p$. Le vecteur de vitesse instantanée, la dérivée, en $t = 0$ est alors donné par :

$$v = \frac{dc}{dt}(0) = \left(\frac{dX_1}{dt}(0), \dots, \frac{dX_m}{dt}(0) \right). \quad (20)$$

Soit $v = (v_1, \dots, v_m) \in T_p(M)$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, une fonction définie dans un voisinage $U \subset M$ de p . Considérons une courbe comme dans (19) telle que $c(0) = p$. Si la vitesse initiale de cette courbe est v , alors nous avons :

$$v = \frac{dc}{dt}(0) \implies \frac{dX_j}{dt}(0) = v_j, j = 1, \dots, m. \quad (21)$$

Enfin, considérons la restriction de f à la courbe c , soit une fonction à une variable $f(c(t))$, que nous dérivons en $t = 0$ à l'aide de la règle de dérivation en

chaîne pour obtenir le résultat suivant :

$$\begin{aligned} \frac{df(c(t))}{dt} \Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt} f(X_1(t), \dots, X_m(t)) \Big|_{t=0} \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial X_j}(p) \frac{dX_j}{dt}(0) \\ &= \sum_{j=1}^m v_j \frac{\partial f}{\partial X_j}(p). \end{aligned} \quad (22)$$

Nous voyons avec la dernière ligne que le résultat ne dépend pas de c , alors la dérivée $\frac{df(c(t))}{dt} \Big|_{t=0}$ s'écrit comme $v \cdot f$, soit la dérivée directionnelle de f vers v . De plus, (22) indique que $v \cdot f > 0$ si et seulement si $f(c(t))$ croît, c'est-à-dire si et seulement si v pointe vers là où f croît.

Définissons à présent un champ vectoriel et une généralisation d'un champ vectoriel gradient.

Définition 4.18. Un champ vectoriel X sur U , un domaine d'une carte locale dans M , est défini par :

$$X = \xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \xi_m \frac{\partial}{\partial x_m} \quad (23)$$

où ξ_1, \dots, ξ_m sont des fonctions définies sur U . Si ces fonctions sont lisses, X est un champ vectoriel lisse sur U . Lorsque $\xi_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, X est le champ vectoriel gradient de f , noté X_f .

En d'autres mots, un champ vectoriel X sur une variété lisse M peut être vu comme une application associant à chaque $p \in M$ un vecteur $c \in T_p M$, puis l'expression $X \cdot f$ représente la dérivée directionnelle de f selon X , c'est-à-dire que $(X \cdot f)(p)$ représente la dérivée de f au point p dans la direction du vecteur $X(p)$.

Définition 4.19. Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse sur une m -variété M compacte et X un champ vectoriel lisse sur M , alors X est un *champ vectoriel de type gradient* (gradient-like vector field, [Mat02]) pour f si les deux conditions suivantes sont respectées :

1. $X \cdot f > 0$ à l'extérieur des points critiques de f
2. Si p_0 est un point critique de f d'indice λ , alors p_0 a un voisinage V avec un système de coordonnées (x_1, \dots, x_m) tel que f ait la forme standard suivante :

$$f = -x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_m^2 + f(p_0) \quad (24)$$

et tel que X s'écrive comme son champ vectoriel gradient comme suit :

$$X = -2x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - \dots - 2x_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\lambda} + 2x_{\lambda+1} \frac{\partial}{\partial x_{\lambda+1}} + \dots + 2x_m \frac{\partial}{\partial x_m}. \quad (25)$$

Remarque 4.20. Si X est un champ vectoriel de type gradient pour f , alors $X \cdot f = (\sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}) \cdot f = \sum_{i=1}^m (\frac{\partial f}{\partial x_i})^2 \geq 0$, où l'égalité survient aux points critiques de f . Ainsi, en dehors des points critiques de f , X pointe dans la direction de la croissance de f (premier point de la définition).

De façon similaire à la fonction de Morse, nous pouvons montrer l'existence d'un champ vectoriel de type gradient.

Théorème 4.21. *Si $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Morse sur une variété compacte M , alors il existe un champ vectoriel de type gradient X pour f .*

Démonstration. Similairement à la preuve du théorème 4.11, choisissons un recouvrement fini U_1, \dots, U_k de M ainsi qu'un ensemble compact K_j pour chaque U_j tel que K_1, \dots, K_k recouvre M . De plus, supposons que chaque point critique p_i a un voisinage V_i contenu dans exactement un des domaines locaux U_i , et que f prenne une forme standard dans chaque U_i .

L'idée de la preuve est de construire un champ vectoriel gradient X_j de f dans chaque U_j afin d'obtenir le champ X désiré.

Afin de définir un champ vectoriel lisse X sur l'entièreté de M , considérons $h_j : U_j \rightarrow \mathbb{R}$ telle que h_j soit une fonction lisse avec $0 \leq h_j \leq 1$, où $h_j = 1$ dans un voisinage V_j de K_j et $h_j = 0$ à l'extérieur d'un compact $L_j \subset U_j$ contenant V_j , comme dans le lemme 4.17, laquelle nous prolongeons à une application lisse $h_j : M \rightarrow \mathbb{R}$ en posant $h_j = 0$ à l'extérieur de U_j .

Soit X_j le champ gradient de f sur l'ouvert U_j . Considérons le champ vectoriel $h_j X_j$ qui assigne à chaque point $p \in U_j$ le vecteur $h_j(p)X_j(p)$, lequel nous prolongeons également à un champ vectoriel lisse sur M en posant $h_j X_j = (0, \dots, 0)$ à l'extérieur de U_j .

Montrons à présent que $\sum_{j=1}^k h_j X_j$ est le champ vectoriel de type gradient désiré.

D'abord si $p \in U_j$, alors $(X_j \cdot f)(p) \geq 0$, puis si $p \notin U_j$, alors $h_j X_j(p) = 0$. Ainsi, la dérivée de f en chaque composante de la somme $\sum_{j=1}^k h_j X_j$ satisfait $(h_j X_j \cdot f)(p) \geq 0$. Rappelons que les ensembles compacts K_1, \dots, K_k recouvrent M et donc p est contenu dans au moins un d'eux, disons K_j , où $h_j = 1$ et $(X_j \cdot f)(p) > 0$. Ceci montre que la dérivée de f par au moins un des termes de la somme est strictement positif, d'où $X \cdot f > 0$, soit la condition (i) de la définition 4.19.

Ensuite, nous avons choisi un voisinage V d'un point critique p_0 contenu dans seulement un U_i dans lequel $h_j = 1$. De plus, f a une forme standard sur U_i et donc $h_i X_i$ est un champ vectoriel de la forme (25) dans V . Puisque le reste des termes $h_j X_j$ de X sont nuls dans V , nous avons que X satisfait la condition (ii) de la définition 4.19, ce qui montre l'existence d'un champ vectoriel de type gradient. \square

Afin de mettre la table pour la prochaine section, définissons brièvement les courbes intégrales (integral curves, [Mat02]) d'un champ vectoriel X sur une variété M .

Définition 4.22. Une courbe $c(t)$ est une courbe intégrale d'un champ vectoriel X si $\frac{dc}{dt}(t) = X_{c(t)}$ pour chaque t où $c(t)$ est définie. Le terme $\frac{dc}{dt}(t)$ correspond au vecteur vitesse de la courbe c .

En d'autres mots, une courbe intégrale d'un champ vectoriel X est le chemin d'une particule se déplaçant avec X selon son vecteur vitesse. Si X est un champ vectoriel de type gradient d'une fonction de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, où M est une variété lisse compacte sans bord, alors la courbe intégrale $c_p(t)$, commençant à un point arbitraire p , approche un point critique p_0 lorsque $t \rightarrow \infty$ et $t \rightarrow -\infty$. Lorsque la courbe approche p_0 , le vecteur vitesse diminue de sorte que la particule n'atteigne jamais p_0 .

Théorème 4.23. *Si f n'a pas de valeur critique dans l'intervalle $[a, b]$, alors $M_{[a,b]} = \{p \in M \mid a \leq f(p) \leq b\}$ est diffeomorphe au produit $f^{-1}(a) \times [0, 1]$.*

Démonstration. Soit X , un champ vectoriel de type gradient pour f . Puisque $X \cdot f > 0$ pour les points non critiques de f , nous pouvons définir un nouveau champ vectoriel Y sur M dont nous excluons les points critiques tel que $Y = \frac{1}{X \cdot f} X$. Par hypothèse (de l'énoncé), $M_{[a,b]}$ ne contient pas de point critique de f , alors M est dans le domaine de Y . Considérons la courbe intégrale $c_p(t)$ de Y commençant à un point p de $f^{-1}(a)$. Par la définition du vecteur vitesse, nous obtenons :

$$\frac{d}{dt}f(c_p(t)) = \frac{dc}{dt}(t) \cdot f = Y_{c(t)} \cdot f = \frac{1}{X \cdot f} X \cdot f = 1 \quad (26)$$

Comme la courbe intégrale $c_p(t)$ commence au niveau $f = a$ au temps $t = 0$, elle atteindra le niveau $f = b$ au temps $t = b - a$.

Définissons une application $h : f^{-1}(a) \times [0, b - a] \rightarrow M_{[a,b]}$ par $h(p, t) = c_p(t)$. Nous pouvons désormais montrer que h est un diffeomorphisme en utilisant le fait que $c_p(t)$ soit lisse selon p et t ainsi que le fait que deux courbes intégrales distinctes ne se rencontrent pas. La preuve se conclut en remarquant que $f^{-1}(a) \times [0, b - a] \cong f^{-1}(a) \times [0, 1]$. \square

Cette section prend fin avec un résultat facilitant l'analyse des points critiques.

Théorème 4.24. *Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse sur M dont les points critiques sont p_1, \dots, p_r , alors il existe une fonction de Morse f' sur M ayant les mêmes points critiques que f et telle que $f'(p_i) \neq f'(p_j)$ si $p_i \neq p_j$ pour $i, j = 1, \dots, r$. De plus, f' peut être prise comme (C^2, ϵ) -approximation de f .*

Démonstration. Supposons que les points critiques p_1 et p_2 de f correspondent à la même valeur critique $c = f(p_1) = f(p_2)$, puis modifions légèrement f . Par le lemme 4.12, nous pouvons choisir un système de coordonnées (x_1, \dots, x_m) pour p_1 où f ait la forme $f = -x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_m^2 + c$.

Calculons $X_f \cdot f$, où X_f est le champ vectoriel gradient de f pour les coordonnées données :

$$X_f \cdot f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_\lambda} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_m} \right)^2 = 4(x_1^2 + \dots + x_\lambda^2 + \dots + x_m^2). \quad (27)$$

Considérons, pour $\epsilon > 0$, $D_{2\epsilon}$ et D_ϵ , les disques de dimension m centrés en p_1 de rayons 2ϵ et ϵ respectivement. Il suit cette équation que $4\epsilon^2 \leq X_f \cdot f \leq 4(2\epsilon)^2$ dans la région $D_{2\epsilon} - \text{int}D_\epsilon$.

Notons par K l'ensemble compact D_ϵ et par U , $\text{int}(D_{2\epsilon})$ de sorte que U soit un ouvert contenant un compact K . Considérons, comme dans le lemme 4.17, la fonction $h : U \rightarrow \mathbb{R}$, laquelle nous prolongeons à une fonction lisse sur l'entièreté de M en posant $h = 0$ à l'extérieur de U .

Posons désormais $\tilde{f} = f + ah$. Puisque $f = \tilde{f}$ à l'extérieur de U , \tilde{f} et f y ont les mêmes points critiques. Ainsi, le seul endroit où \tilde{f} a possiblement un ensemble de points critiques différents est la région entre D_ϵ et $D_{2\epsilon}$.

Calculons alors les différences des premières dérivées partielles de \tilde{f} et f :

$$\left| \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| = \left| a \frac{\partial h}{\partial x_i} \right| \quad (28)$$

Il suit alors que tant que la valeur absolue de a est assez petite, la différence entre $\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2$ et $\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i} \right)^2$ est assez petite, puis comme $\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 = X_f \cdot f$ atteint sa valeur minimale $4\epsilon^2 > 0$ entre $D_{2\epsilon}$ et D_ϵ , alors $\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i} \right)^2$ prend sa valeur minimale non nulle dans cette région également. Ainsi \tilde{f} n'a pas de valeur critique dans cette région.

Nous pouvons conclure que f et \tilde{f} ont le même ensemble de valeurs critiques, donc \tilde{f} est aussi une fonction de Morse. De plus, nous avons que $\tilde{f}(p_1) = f(p_1) + a$ et $\tilde{f}(p_2) = f(p_2)$, alors même si $f(p_1) = f(p_2)$, $\tilde{f}(p_1) \neq \tilde{f}(p_2)$. Nous pouvons réutiliser cet argument pour définir une fonction dont les valeurs critiques sont distinctes pour des points critiques distincts. Enfin, pour montrer que \tilde{f} est une (C^2, ϵ) -approximation de f , nous appliquons le même argument que dans la preuve du théorème 4.11. \square

5 Décomposition en anses

Dans cette section, inspirée de [Mat02], nous nous intéressons à la variation, selon t , du sous-ensemble $M_t = \{p \in M \mid f(p) \leq t\}$ d'une variété compacte M sur laquelle une fonction de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ est définie.

Le théorème suivant est une adaptation plus concrète du théorème 4.23 de la section précédente. La preuve nécessite cependant une compréhension plus approfondie que ce qui a été présenté sur les courbes intégrales, et par conséquent sera omise de cet article. Voir [Mat02] pour les détails.

Théorème 5.1. *Si f n'a pas de valeur critique dans $[a, b]$, alors les sous-variétés M_a et M_b sont difféomorphes.*

Nous remarquons de ce théorème que M_t ne change que lorsque t passe par une valeur critique.

De plus, par le corollaire 4.9, f admet un nombre fini de points critiques p_i , disons $n + 1$, puis par le théorème 4.24, nous pouvons supposer que les valeurs critiques $c_i = f(p_i)$ sont distinctes, telles que $c_0 < c_1 < \dots < c_n$.

Avec la notation de l'introduction de la section, nous remarquons que $M_t = \emptyset$ si $t < c_0$, et que $M_t = M$ si $t \geq c_n$. Observons de plus près l'allure de M_t aux alentours du minimum c_0 grâce à la forme standard de f , laquelle ne contient pas de signe négatif puisque $f \geq c_0$. L'indice de p_0 est donc 0.

$$f = x_1^2 + \dots + x_m^2 + c_0 \quad (29)$$

Ce qui a été mentionné plus haut peut se récrire par $M_{c_0-\epsilon} = \emptyset$, puis nous pouvons exprimer $M_{c_0+\epsilon}$ à l'aide de l'équation 29 comme suit :

$$M_{c_0+\epsilon} = \{(x_1, \dots, x_m) | x_1^2 + \dots + x_m^2 \leq \epsilon\} \quad (30)$$

Ce qui nous indique que $M_{c_0+\epsilon}$ est difféomorphe au disque D^m , que nous appellerons bientôt 0-anse.

Le théorème suivant, dont la preuve sera omise pour les mêmes raisons que celle du théorème 5.1, décrit le passage par une valeur critique.

Théorème 5.2. *L'ensemble $M_{c_i+\epsilon}$ est difféomorphe à la variété obtenue en attachant une λ -anse à $M_{c_i-\epsilon}$, c'est-à-dire $M_{c_i+\epsilon} \cong M_{c_i-\epsilon} \cup D^\lambda \times D^{m-\lambda}$.*

Attacher une λ -anse $D^\lambda \times D^{m-\lambda}$ à $M_{c_i-\epsilon}$ en collant $\partial D^\lambda \times D^{m-\lambda}$ le long des bords de $M_{c_i-\epsilon}$ se fait en définissant une application $\phi : \partial D^\lambda \times D^{m-\lambda} \rightarrow \partial M_{c_i-\epsilon}$ identifiant chaque point $p \in \partial D^\lambda \times D^{m-\lambda}$ avec $\phi(p) \in \partial M_{c_i-\epsilon}$.

Les anses mentionnées au théorème précédent motivent la prochaine définition.

Définition 5.3. Une variété avec bords obtenue à partir de D^m en y attachant des anses de divers indices est un corps en anses de dimension m . Il se définit plus précisément par sa construction selon les trois étapes suivantes :

1. Le disque D^m correspondant à une 0-anse est un corps en anses
2. La variété $D^m \cup_{\phi_1} D^{\lambda_1} \times D^{m-\lambda_1}$ obtenue de D^m en attachant une λ_1 -anse avec une fonction de collage ϕ_1 est un corps en anses noté $\mathcal{H}(D^m; \phi_1)$
3. Si $N = \mathcal{H}(D^m; \phi_1, \dots, \phi_{i-1})$ est un corps en anses, alors la variété $N \cup_{\phi_i} D^{\lambda_i} \times D^{m-\lambda_i}$ obtenue de N en attachant une λ_i -anse $D^{\lambda_i} \times D^{m-\lambda_i}$ avec une fonction de collage ϕ_i est un corps en anses de dimension m , noté $\mathcal{H}(D^m; \phi_1, \dots, \phi_{i-1}, \phi_i)$

Remarque 5.4. L'expression *attacher une anse* cache un recollement ϕ (attaching map, [Mat02]) correspondant à un *plongement lisse* (smooth embedding, [Mat02]).

Théorème 5.5. (*Décomposition en anses d'une variété*)

Lorsqu'une fonction de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ est donnée sur une variété compacte, une structure d'un corps en anses sur M est déterminée par f . Les anses de ce corps en anses correspondent aux points critiques de f , et les indices de ces anses coïncident avec les indices des points critiques de f correspondants. En d'autres mots, M peut s'exprimer comme un corps en anses. Lorsqu'une variété est ainsi exprimée, elle est appelée décomposition en anses.

Démonstration. En choisissant judicieusement une (C^2, ϵ) -approximation, supposons que tous les points critiques d'une fonction de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ puissent correspondre à des valeurs critiques $c_i = f(p_i)$ distinctes (théorème 4.24) classées en ordre croissant, puis nommons λ_i , l'indice du point critique p_i . Soit X un champ vectoriel de type gradient pour la fonction de Morse f sur M . La preuve du théorème 5.5 sera faite par récurrence sur i .

D'abord pour $i = 0$, l'indice de p_0 est 0, puis $M_{c_0+\epsilon}$ est diffeomorphe au disque D^m , tel que mentionné plus haut, qui est un corps en anses par le premier point de la définition.

Supposons ensuite, comme hypothèse de récurrence, que $M_{c_{i-1}+\epsilon}$ est un corps en anses $\mathcal{H}(D^m; \phi_1, \dots, \phi_{i-1})$. Montrons que $M_{c_i+\epsilon}$ est un corps en anses $\mathcal{H}(D^m; \phi_1, \dots, \phi_{i-1}, \phi_i)$.

Rappelons que $M_{c_i+\epsilon}$ est diffeomorphe à la variété obtenue en attachant une λ_i -anse à $M_{c_i-\epsilon}$ (5.2) par l'application de collage $\phi : \partial D^{\lambda_i} \times D^{m-\lambda_i} \rightarrow \partial M_{c_i-\epsilon}$.

Comme l'intervalle $[c_{i-1} + \epsilon, c_i - \epsilon]$ ne contient pas de valeurs critiques, $M_{c_{i-1}+\epsilon}$ est diffeomorphe à $M_{c_i-\epsilon}$ par le théorème 5.1. Ce diffeomorphisme, $\psi : M_{c_{i-1}+\epsilon} \rightarrow M_{c_i-\epsilon}$, est donné en laissant $M_{c_{i-1}+\epsilon}$ « glisser » le long du champ vectoriel de type gradient X jusqu'à ce qu'il corresponde à $M_{c_i-\epsilon}$.

Par l'hypothèse de récurrence (laquelle indique que $M_{c_{i-1}+\epsilon}$ est un corps en anses $\mathcal{H}(D^m; \phi_1, \dots, \phi_{i-1})$), nous avons que $M_{c_i-\epsilon}$ est diffeomorphe au même corps en anses. Ainsi, la variété $M_{c_i+\epsilon}$ est aussi diffeomorphe à un corps en anses par le troisième point de la définition 5.3. Ceci achève la preuve. \square

Détaillons davantage l'application de recollement de la nouvelle λ_i -anse. Par l'hypothèse de récurrence, $M_{c_{i-1}+\epsilon}$ est le corps en anses $\mathcal{H}(D^m; \phi_1, \dots, \phi_{i-1})$ de sorte que le diffeomorphisme ψ énoncé plus haut puisse être vu comme un diffeomorphisme de $\mathcal{H}(D^m; \phi_1, \dots, \phi_{i-1})$ à $M_{c_i-\epsilon}$. Plus précisément, la λ_i -anse est attachée à $M_{c_i-\epsilon}$ plutôt qu'au corps en anses $\mathcal{H}(D^m; \phi_1, \dots, \phi_{i-1})$.

Ainsi, lorsque $M_{c_i-\epsilon}$ est identifiée avec le corps en anses $\mathcal{H}(D^m; \phi_1, \dots, \phi_{i-1})$ par le diffeomorphisme ψ , la λ_i -anse est attachée au corps en anses par la composition $\psi^{-1} \circ \phi : \partial D^{\lambda_i} \times D^{m-\lambda_i} \rightarrow \partial \{\mathcal{H}(D^m; \phi_1, \dots, \phi_{i-1})\}$. Alors en posant $\psi^{-1} \circ \phi = \phi_i$, nous obtenons effectivement que $M_{c_i+\epsilon}$ est le corps en anses $\mathcal{H}(D^m; \phi_1, \dots, \phi_{i-1}, \phi_i) = \mathcal{H}(D^m; \phi_1, \dots, \phi_{i-1}) \cup_{\phi_i} D^{\lambda_i} \times D^{m-\lambda_i}$.

Consolidons la théorie présentée dans cet article à l'aide de deux exemples, le premier étant une généralisation des exemples 3.15 et 4.3, puis le second détaillant l'exemple 3.16.

Exemple 5.6. Soit $S^m = \{(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}) \mid x_1^2 + \dots + x_m^2 + x_{m+1}^2 = 1\}$, la sphère de dimension m , sur laquelle nous définissons $f : S^m \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}) = x_{m+1}$, la fonction hauteur selon la $m+1$ -ième coordonnée.

Les dérivées de premier ordre sur les hémisphères U_{m+1}^\pm sont $\frac{\partial f}{\partial x_i} = -\frac{x_i}{x_{m+1}}$, alors les deux seuls points critiques de f sont $(0, \dots, \pm 1)$. Nous validons également qu'ils sont non dégénérés, faisant de f une fonction de Morse.

Cet exemple mène au théorème suivant [Mil63] :

Théorème 5.7. *S'il existe une fonction de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ sur une m -variété compacte M ayant seulement deux points critiques, alors M est homéomorphe à la sphère S^m .*

Discutons de l'idée générale de la preuve du théorème 5.7.

Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction de Morse n'ayant que deux points critiques définie sur une m -variété compacte M . Par le théorème de valeur maximale, f admet un minimum en $A = f(a) \in \mathbb{R}$ et un maximum en $B = f(b) \in \mathbb{R}$.

Par la forme standard du théorème 4.5, pour un certain $\epsilon > 0$, les ensembles $f^{-1}([A, A + \epsilon])$ et $f^{-1}([B - \epsilon, B])$ sont homéomorphes à des m -disques.

Par le théorème 5.1, $f^{-1}([A, A + \epsilon])$ est difféomorphe à $f^{-1}([A, A + B - \epsilon])$.

Ainsi, $M = f^{-1}([A, A + \epsilon]) \cup_\phi f^{-1}([B - \epsilon, B])$, où ϕ est le recollement autour des bords communs des deux m -disques.

La preuve se conclut en construisant un homéomorphisme entre M et S^m .

Exemple 5.8. L'espace projectif $\mathbb{R}\mathbb{P}^m$ (aussi noté \mathbb{P}^m) défini à l'exemple 3.16 est compact grâce au théorème 2.10 et à la projection (fonction continue) de S^m sur \mathbb{P}^m . En effet, ceci s'observe en choisissant α de sorte que $y_1^2 + \dots + y_{m+1}^2 = 1$, où α est celui de la relation d'équivalence des éléments de \mathbb{P}^m :

$$[y_1, \dots, y_{m+1}] = [x_1, \dots, x_{m+1}] \iff (y_1, \dots, y_{m+1}) = \alpha(x_1, \dots, x_{m+1}).$$

Pour $a_1 < \dots < a_{m+1}$, considérons la fonction $f : \mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f([x_1, \dots, x_m, x_{m+1}]) = \frac{a_1 x_1^2 + \dots + a_{m+1} x_{m+1}^2}{x_1^2 + \dots + x_{m+1}^2}.$$

Cette fonction est bien définie sur \mathbb{P}^m , puisqu'elle ne change pas lorsque nous remplaçons x_i par αx_i .

Considérons ensuite les ouverts des cartes locales définies à l'exemple 3.16. Les expressions de f et de son gradient dans le système de coordonnées locales sont données par :

$$f(X_1, \dots, X_m) = \frac{a_1 X_1^2 + \dots + a_{i-1} X_{i-1}^2 + a_i + a_{i+1} X_i^2 + \dots + a_{m+1} X_m^2}{X_1^2 + \dots + X_{i-1}^2 + 1 + \dots + X_m^2} \quad (31)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial X_m} = \frac{2X_m\{(a_{m+1} - a_1)X_1^2 + \dots + (a_{m+1} - a_m)X_{m-1}^2 + a_{m+1} - a_i\}}{(X_1^2 + \dots + X_m^2 + 1)^2} \quad (32)$$

Comme $a_1 < \dots < a_{m+1}$, $\frac{\partial f}{\partial X_m}$ s'annule si et seulement si $X_m = 0$, puis la dérivée partielle de la restriction $f|_{X_m=0}$ selon X_{m-1} s'annule si et seulement si $X_{m-1} = 0$, processus que nous répétons afin d'obtenir qu'un point critique de f dans le voisinage U_i doit satisfaire $X_i = \dots = X_m = 0$.

Ensuite, en dérivant l'équation 31 selon X_1 jusqu'à X_{i-1} , nous pouvons conclure que le seul point critique de f sur U_i est l'origine dans le système de coordonnées (X_1, \dots, X_m) , c'est-à-dire $[0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]$, où la i -ième coordonnée est 1.

La matrice hessienne $(\frac{\partial^2 f}{\partial X_j \partial X_k})$ en ce point est diagonale et a un déterminant non nul, puisque les $(i - 1)$ premiers éléments de sa diagonale sont négatifs, et les autres sont positifs. Le point critique est donc non dégénéré d'indice $i - 1$.

Ainsi, la fonction de Morse $f : \mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{R}$ a $m + 1$ points critiques d'indices $0, 1, \dots, m$, donnant à \mathbb{P}^m la décomposition en anses suivante :

$$P^m = D^m \cup D^1 \times D^{m-1} \cup D^2 \times D^{m-2} \cup \dots \cup D^{m-1} \times D^1 \cup D^m. \quad (33)$$

Remarque 5.9. En particulier, il suit de l'exemple 5.8 que la droite projective \mathbb{P}^1 est difféomorphe au cercle \mathbb{S}^1 , car leur décomposition en anses est $D^1 \cup D^1$.

6 Conclusion

Nous avons d'abord vu quelques notions préliminaires sur les espaces topologiques, les variétés lisses M ainsi que les fonctions lisses $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Ensuite nous avons vu les définitions et les résultats centraux de la théorie de Morse. En particulier, nous avons vu qu'autour de chaque point critique $p \in M$ d'une fonction de Morse f , il existe un système de coordonnées (x_1, \dots, x_m) dans lequel f se représente par $f(x_1, \dots, x_m) = -x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + \dots + x_m^2 + f(p)$, de sorte que chaque point critique puisse être associé à un indice λ . De plus, nous avons vu que toute fonction lisse g sur une variété compacte M peut être approximée par une fonction de Morse aussi près de g que désiré.

Ensuite, nous avons présenté l'existence d'un champ vectoriel de type gradient pour une fonction de Morse f , X_f , afin de prouver par exemple que $M_{[a,b]} = \{p \in M \mid a \leq f(p) \leq b\}$ est difféomorphe à $f^{-1}(a) \times [0, 1]$ lorsqu'il n'y a pas de valeur critique dans $[a, b]$, puisque les courbes intégrales de X_f définissent un difféomorphisme entre ces deux ensembles.

Nous avons d'ailleurs vu que ce dernier résultat implique que les espaces $M_a = \{p \in M \mid f(p) \leq a\}$ et $M_b = \{p \in M \mid f(p) \leq b\}$ sont toujours difféomorphes lorsqu'aucune valeur critique est comprise dans l'intervalle $[a, b]$, mais qu'au contraire lorsqu'il existe $p \in M$ critique tel que $f(p) \in [a, b]$, alors M_a et M_b ont

une forme fondamentalement différente. Plus précisément, nous pouvons voir M_b comme un recollement d'une λ -anse à M_a , où λ est l'indice du point critique p .

En somme, dans cet article nous avons vu qu'en considérant les valeurs critiques d'une fonction de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ et les indices associés, M peut s'exprimer comme une suite de recollements de λ_i -anses dit corps en anses.

Cependant, il y a de multiples notions que nous n'avons pas détaillées, par exemple les plans tangents et les courbes intégrales nécessaires aux démonstrations des théorèmes sur les difféomorphismes, ou encore la notion de plongement lisse (smooth embedding, [Lee13]) nécessaire à la définition de sous-variété lisse. Un lecteur intéressé peut se tourner vers les chapitres 3, 4, 5, 8 et 9 de [Lee13].

De plus, il y a plusieurs concepts connexes que nous n'avons pas mentionnés, par exemple les groupes d'homologie d'une variété M ainsi que leurs liens avec le nombre de points critiques d'une fonction de Morse sur M , ou encore la classification des variétés de dimension $m \leq 4$. Ces notions sont abordées aux chapitres 4 et 5 de [Mat02].

Comme cet article visait à introduire la topologie différentielle par le biais de la théorie de Morse et que cette dernière n'ait été que très brièvement survolée, nous pouvons imaginer tous les sujets encore à découvrir et à approfondir.

Références

- [BDM17] William E BOYCE, Richard C DiPRIMA et Douglas B MEADE : *Elementary differential equations*. John Wiley & Sons, 2017.
- [Bot80] Raoul BOTT : Marston morse and his mathematical works. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 3(3):907–950, 1980.
- [Hat04] Allen HATCHER : The classification of 3-manifolds—a brief overview. *Unpublished talk available online at <http://www.math.cornell.edu/hatcher>*, 2004.
- [Hat22] Allen HATCHER : The kirby torus trick for surfaces, 2022.
- [Ker60] Michel A KERVAIRE : A manifold which does not admit any differentiable structure. *Comment. Math. Helv*, 34(1):257–270, 1960.
- [Knu15] Kevin P KNUDSON : *Morse theory : Smooth and discrete*. World Scientific Publishing Company, 2015.
- [Lan95] Serge LANG : *Differential and Riemannian Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1995.
- [Lee13] John M. LEE : *Introduction to Smooth Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer Science and Business Media, 2013.
- [LLT04] Thomas LEWINER, Helio LOPES et Geovan TAVARES : Applications of forman's discrete morse theory to topology visualization and mesh

- compression. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 10(5):499–508, 2004.
- [Mat02] Y. MATSUMOTO : *An Introduction to Morse Theory*. Iwanami series in modern mathematics. American Mathematical Society, 2002.
- [Mil63] John MILNOR : *Morse Theory. (AM-51), Volume 51*. Princeton University Press, 1963.
- [N⁺11] Liviu I NICOLAESCU *et al.* : *An invitation to Morse theory*. Springer, 2011.
- [NI14] Francis NIER et Dragoş IFTIMIE : Introduction à la topologie. *Université de Rennes 1*, 2014.

GENEVIÈVE SOROKA-PERRAS
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
Courriel: Geneviève.Soroka-Perras@USherbrooke.ca